



COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

1. DÉNOMBREMENT ET p -UPLETS

COMPTER

CHOISIR

ORGANISER

RAISONNER

13

13

21

1 Ensemble fini et cardinal

Définition

Un ensemble E est **fini** lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments. Le nombre d'éléments de E est appelé le **cardinal** de E . On le note $\text{Card}(E)$ ou $|E|$. Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ est un ensemble fini de cardinal 0 : $|\emptyset| = 0$.

Exemples

- $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $|E| = 5$.
- L'ensemble des jours de la semaine a 7 éléments.
- Si une classe compte 32 élèves, alors $|E| = 32$.



À retenir

Dénombrer, c'est déterminer le nombre d'éléments (c'est-à-dire le **cardinal**) d'un ensemble fini.

2 Principe additif

Propriété

Si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des ensembles finis **deux à deux disjoints**, alors :

$$\text{Card}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2) + \dots + \text{Card}(E_n)$$

Exemple

Dans un club, 12 élèves font du tennis, et aucun élève ne fait les deux sports. Le nombre d'élèves qui pratiquent l'un de ces deux sports est :
 $12 + 8 = 20$.



Tennis
(12)



Basket
(8)

3 Principe multiplicatif

Propriété

Si une situation se décompose en plusieurs étapes successives, avec $n_1, n_2, \dots, n_k$ possibilités à chaque étape, alors le nombre total de possibilités est :

$$N = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$$

Exemple

Un menu est composé d'1 entrée (3 choix), 1 plat (4 choix) et 1 dessert (2 choix).
Nombre de menus : $3 \times 4 \times 2 = 24$.



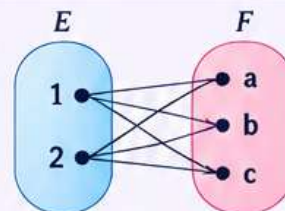
4 Produit cartésien

Définition

Soit E et F deux ensembles finis. Le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in E$ et $b \in F$.

Exemple $E = \{1, 2\}$ $F = \{a, b, c\}$

$$E \times F = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$



Remarque

- Un couple est un **2-uplet**.
- De même, $E \times F \times G$ est l'ensemble des triplets (a, b, c) .
- Plus généralement, on parle de **p -uplets**.

5 p -uplets

Définition

Soit $p \geq 1$ et $E_1, E_2, \dots, E_p$ des ensembles finis. Le **produit cartésien** $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est l'ensemble des **p -uplets** $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ avec $a_i \in E_i$.

Exemple

Un code à 4 chiffres.
Chaque chiffre peut être 0, 1, ..., 9.
Il y a 10 possibilités à chaque position.
Nombre de codes : $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\,000$.



6 Produit d'un ensemble sur lui-même

Si E est un ensemble fini de cardinal n , on note E^p le produit de E par lui-même p fois. On a alors :

$$\text{Card}(E^p) = n^p$$

Exemple

- On lance deux dés à six faces.
- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ donc $\text{Card}(E) = 6$.
- Nombre de couples possibles : $\text{Card}(E^2) = 6^2 = 36$.
- De même, un code à 3 chiffres : $10^3 = 1\,000$ possibilités.



À retenir – L'essentiel de cette page

- ✓ Le **cardinal** d'un ensemble fini se note $\text{Card}(E)$ ou $|E|$.
- ✓ **Principe additif** : on additionne les possibilités (ensembles disjoints).
- ✓ **Principe multiplicatif** : on multiplie les possibilités (étapes successives).
- ✓ Le **produit cartésien** $E \times F$ regroupe tous les couples (a, b) avec $a \in E$ et $b \in F$.
- ✓ Un **p -uplet** est un élément de $E_1 \times \dots \times E_p$.
- ✓ Si E a n éléments, alors $\text{Card}(E^p) = n^p$.

*En combinatoire,
tout est une question
de possibilités !*

COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

Des
méthodes
pour compter
dans toutes
les situations !

2. FACTORIELLE, ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS

1 La factorielle d'un entier naturel

Définition

Pour tout entier naturel n :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

Par convention :

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

Exemples

- $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
- $7! = 5! \times 6 \times 7 = 5\,040$
- $100!$ est un très grand nombre.

Remarque

On lit « n factorielle »
et on note $n!$.
La factorielle intervient dans
de nombreuses situations
de dénombrement.

Exemple

Calculer :

- $6!$
- $8!$



2 Arrangements

Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier
avec $0 \leq p \leq n$.

Un **arrangement** de p éléments de E est un p -uplet
d'éléments distincts de E .

Propriété

Dans un arrangement, l'ordre des éléments compte
et les éléments ne se répètent pas.

Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple 1

On veut former un podium (1^{er}, 2^e, 3^e)
parmi 8 coureurs.

Nombre de podiums :

$$A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336.$$



Exemple 2

On choisit un code de 4 chiffres
tous différents.

Nombre de codes :

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040.$$



3 Permutations

Définition

Une **permutation** de n éléments est un arrangement
de n éléments.

Propriété

Le nombre de permutations de n éléments est :

$$P_n = n!$$

On utilise tous les éléments et l'ordre compte.

Exemple 1

Combien y a-t-il d'ordres possibles
pour 6 personnes ?

$$P_6 = 6! = 720.$$



Exemple 2

Combien d'anagrammes du mot
MATHS (5 lettres toutes différentes) ?

$$P_5 = 5! = 120.$$



Il y a 120 anagrammes de MATHS.



À retenir – Comparer les situations

Situation	Ordre compte ?	Répétition possible ?	Formule
Arrangement de p éléments	Oui	Non	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Permutation de n éléments	Oui	Non (tous utilisés)	$n!$
p -uplet (avec répétition)	Oui	Oui	n^p
Combinaison (vu page suivante)	Non	Non	$\binom{n}{p}$

Même éléments,
mais pas la même question ...
→ L'ordre change tout !

Choisir
sans compter
deux fois !

COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

Des
situations
concrètes,
des outils
efficaces !

3. COMBINAISONS ET COEFFICIENTS BINOMIAUX

1 Combinaisons

Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier avec $0 \leq p \leq n$.
Une **combinaison** de p éléments de E est une partie de E à p éléments (l'ordre ne compte pas).

Formule

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple

On choisit 3 élèves parmi 8 pour former une équipe.
L'équipe $\{A, B, C\}$ est la même que $\{C, A, B\}$:
→ une seule combinaison.



On choisit,
l'ordre n'a
pas d'importance !

Exemple

Choisir 4 élèves parmi 15 :

$$\binom{15}{4} = \frac{15!}{4!11!} = 1\,365.$$

Remarque

Une combinaison correspond au choix de p éléments parmi n , c'est une partie de E à p éléments.
Par exemple : $\{A, B, C\} = \{C, B, A\}$.

2 Propriétés simples

- $\binom{n}{0} = 1$ (il n'y a qu'une partie vide)
- $\binom{n}{n} = 1$ (on prend tous les éléments)
- $\binom{n}{1} = n$ (on choisit un seul élément)
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (symétrie)
- $0 \leq p \leq n$ (sinon $\binom{n}{p}$ n'est pas défini)

3 Symétrie des coefficients binomiaux

Propriété

Pour tout $n \geq 0$ et tout $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Exemple

$$\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$

(on choisit 3, ou bien on en laisse 7).

Interprétation

Choisir p éléments parmi n revient à ne pas choisir les $n - p$ éléments.

Deux façons
de voir la même chose !



4 Relation de Pascal

Propriété

Pour tout $n \geq 0$ et $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Démonstration (idée)

Une partie de $\{1, \dots, n+1\}$ à $p+1$ éléments contient soit $n+1$, soit ne le contient pas.

- Si elle contient $n+1$: il reste à choisir p éléments parmi $\{1, \dots, n\}$: $\binom{n}{p}$ possibilités.
- Si elle ne contient pas $n+1$: il faut choisir $p+1$ éléments parmi $\{1, \dots, n\}$: $\binom{n}{p+1}$ possibilités.

D'où le résultat.

Exemple

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$$

$$10 + 10 = 20$$

Cette relation permet
de construire le
triangle de Pascal !

5 Quelques valeurs utiles

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

Exemples

- $\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$
(nombre de paires parmi 8)
- $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$
(nombre de groupes de 3 parmi 10)



La combinaisons :
le bon outil
pour choisir sans
se tromper !

1 Le triangle de Pascal

Définition

Le triangle de Pascal est un tableau dans lequel la ligne n (en commençant à 0) contient les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$ pour $0 \leq p \leq n$.

Remarque

- Chaque ligne est symétrique.
- Les nombres aux extrémités sont toujours égaux à 1.
- La somme des nombres de la ligne n est 2^n .

Propriété (rappel)

Pour tout $n \geq 0$ et $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Construction

- On place un 1 au sommet.
- Chaque nombre est la somme des deux nombres situés en haut à gauche et en haut à droite.
- La ligne n contient $n + 1$ nombres.

Exemple (les 6 premières lignes)

n correspond à la ligne

p correspond à la colonne

p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Chaque ligne raconte toutes les possibilités !

2 Parties d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble à n éléments.
Une partie de E est un sous-ensemble de E .
Une partie à p éléments est un sous-ensemble de E qui contient exactement p éléments.

Propriété

Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est :

$$\binom{n}{p} \quad (0 \leq p \leq n).$$

Exemples

Soit $E = \{a, b, c, d\}$.

- Nombre de parties à 2 éléments : $\binom{4}{2} = 6$
- Elles sont : $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$.
- Nombre de parties à 0 élément : $\binom{4}{0} = 1$ (la partie vide $\emptyset$).
- Nombre de parties à 4 éléments : $\binom{4}{4} = 1$ (l'ensemble lui-même).

3 Nombre total de parties

Propriété

Un ensemble à n éléments possède 2^n parties.

Exemple

Si $n = 4$, alors $2^4 = 16$.
L'ensemble $\{a, b, c, d\}$ possède 16 parties (1 de taille 0, 4 de taille 1, 6 de taille 2, 4 de taille 3 et 1 de taille 4).

Démonstration (idée)

Chaque élément de E a deux possibilités :

- soit il appartient à la partie,
 - soit il n'appartient pas à la partie.
- Il y a donc $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$ possibilités.

4 Lien avec le triangle de Pascal

Propriété

La ligne n du triangle de Pascal contient les nombres $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$.
Leur somme est donc :

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n.$$

Exemple ($n = 4$)

La ligne 4 du triangle de Pascal est :

1	4	6	4	1
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$
Nombre de parties à 0 élément	Nombre de parties à 1 élément	Nombre de parties à 2 éléments	Nombre de parties à 3 éléments	Nombre de parties à 4 éléments

Une même ligne, toutes les tailles de parties !

Total :

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$

À retenir – Quelle formule choisir ?

Situation	Ordre compte ?	Répétition possible ?	Formule
Arrangement de p éléments	Oui	Non	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Permutation de n éléments	Oui	Non (tous utilisés)	$n!$
p -uplet (avec répétition)	Oui	Oui	n^p
Combinaison (parties à p éléments)	Non	Non	$\binom{n}{p}$
Nombre total de parties	—	—	2^n

Idée clé

- Le triangle de Pascal permet de connaître directement le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.
- La somme des nombres de la ligne n vaut 2^n , soit le nombre total de parties.
- Chaque ligne est symétrique.
- Les extrémités sont toujours égales à 1.
- Le triangle de Pascal est un outil puissant pour visualiser toutes les possibilités !

Compter, c'est voir plus loin !