

Continuité et convexité

1. Comprendre la continuité

Qu'est-ce qu'une fonction continue ?

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I .
 f est continue en a lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

La limite de $f(x)$ quand x se rapproche de a coïncide avec la valeur $f(a)$.

f est continue sur I si elle est continue en chaque point de I .

À une extrémité de I , on utilise la limite du côté où f est définie.

Lire une courbe



Sans rupture

La courbe reste d'un seul tenant.



Avec un saut

Les limites à gauche et à droite sont différentes.

Des fonctions usuelles continues

Fonction	Intervalle
Polynômes	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln x$	$] 0 ; +\infty[$

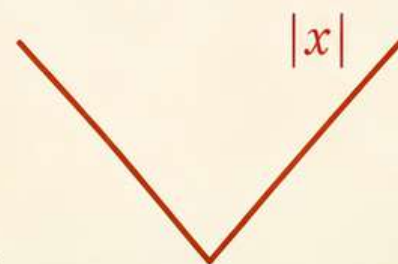
Continue ne signifie pas dérivable

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

La réciproque est fausse.

La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Sa courbe présente une pointe en 0 : elle n'est pas dérivable en 0.



À retenir

La continuité relie une limite à la valeur de la fonction.
 Une pointe n'est pas une rupture.

Continuité et convexité

2. Le théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intermédiaires

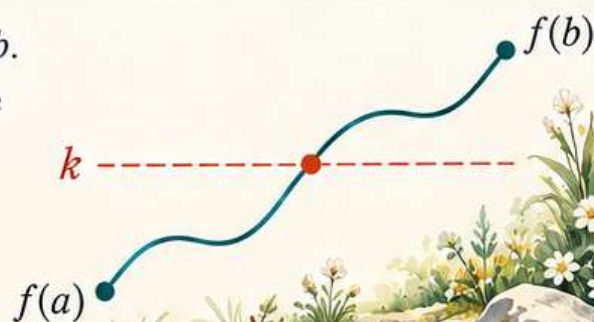
Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$, avec $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe

au moins un réel c dans $[a ; b]$ tel que :

$$f(c) = k$$

Une fonction continue prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$.



Quand la solution est-elle unique ?

Si, de plus, f est strictement monotone sur $[a ; b]$, la solution est unique.

Le TVI seul garantit l'existence, pas l'unicité.

Exemple corrigé

Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution dans $[0 ; 1]$.

On pose $f(x) = x^3 + x - 1$.

1 Continuité

f est une fonction polynôme : elle est continue sur $[0 ; 1]$.

2 Valeurs aux bornes

$f(0) = -1$ et $f(1) = 1$.

Le réel 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.

Par le TVI, il existe au moins une solution α dans $]0 ; 1[$.

3 Unicité

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur $[0 ; 1]$.

f est donc strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

La solution α est unique.

4 Encadrement

$f(0,6) = -0,184$ et $f(0,7) = 0,043$.

Comme f est strictement croissante :

$$0,6 < \alpha < 0,7$$

À retenir

Continuité + valeurs encadrant $k \Rightarrow$ existence.

Stricte monotonie en plus $\Rightarrow$ unicité.

Continuité et convexité

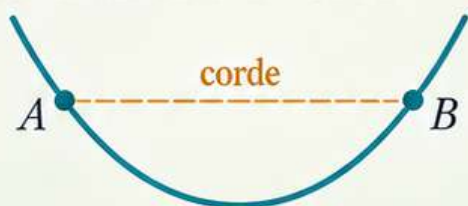
3. Convexité et concavité

Comment la courbe se courbe-t-elle ?

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

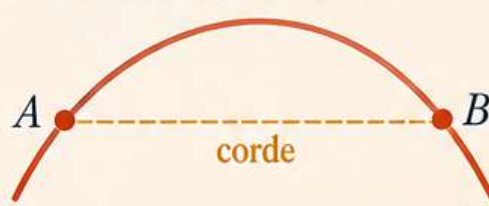
Fonction convexe

La courbe est au-dessus de ses tangentes.
Elle est en dessous de ses cordes.



Fonction concave

La courbe est en dessous de ses tangentes.
Elle est au-dessus de ses cordes.



Une corde est un segment reliant deux points de la courbe.

Les dérivées donnent le critère

Si f est deux fois dérivable sur I :

Fonction f	Variation de f'	Signe de f''
Convexe	f' croissante	$f'' \geq 0$
Concave	f' décroissante	$f'' \leq 0$

Ces critères se vérifient sur tout l'intervalle I .

C'est la variation de f' qui compte, pas le signe de f' .

Exemple corrigé

Étudier la convexité de $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

1 Dérivée
 $f'(x) = 2x$

2 Dérivée seconde
 $f''(x) = 2$

3 Conclusion
Pour tout réel x , $f''(x) > 0$.
La fonction f est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

Pour $g(x) = -x^2$, on obtient $g''(x) = -2 < 0$.
La fonction g est donc concave sur $\mathbb{R}$.

Convexité et sens de variation

Sur $] -\infty ; 0]$, la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante.
Elle reste pourtant convexe.

Convexité et sens de variation sont deux notions différentes.

À retenir

Convexe : sous ses cordes, au-dessus de ses tangentes.

Concave : au-dessus de ses cordes, sous ses tangentes.

Une fonction affine est à la fois convexe et concave.

Continuité et convexité

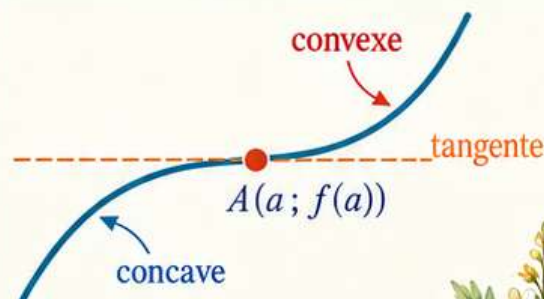
4. Les points d'inflexion

Un changement de convexité

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et a un point intérieur de I .

Le point $A(a; f(a))$ est un **point d'inflexion** lorsque la courbe change de convexité en a .

En ce point, la courbe traverse sa tangente.



Le rôle de la dérivée seconde

On étudie le signe de f'' de part et d'autre de a .

Si f'' s'annule en a et **change de signe**, alors $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion.

Attention : $f''(a) = 0$ ne suffit pas.

Exemple corrigé : $f(x) = x^3$

1 Calculer les dérivées

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

2 Étudier le signe de f''

Pour $x < 0$: $f''(x) < 0$.

Pour $x > 0$: $f''(x) > 0$.

f est concave sur $] -\infty ; 0]$
et convexe sur $[0 ; +\infty [$.

3 Déterminer le point d'inflexion

$f''(0) = 0$ et f'' change de signe en 0.
Comme $f(0) = 0$, le point $O(0; 0)$ est un point d'inflexion.

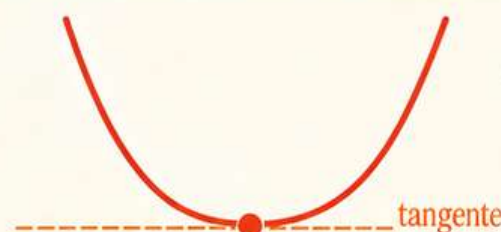
De plus, $f'(0) = 0$: la tangente en O a pour équation $y = 0$.

Le piège : $g(x) = x^4$

$g''(x) = 12x^2 \geq 0$ pour tout réel x .

En 0, g'' s'annule mais **ne change pas de signe**.

g reste convexe sur $\mathbb{R}$: $O(0; 0)$ n'est pas un point d'inflexion.



À retenir

- Repérer un changement de convexité.
- Donner les coordonnées $A(a; f(a))$.
- Une dérivée seconde nulle, seule, ne suffit pas.

Continuité et convexité

5. Tangentes et inégalités

Comparer une courbe à une droite

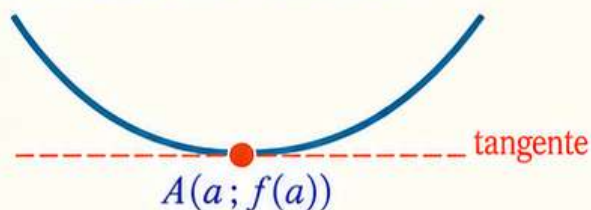
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un point intérieur de I .
La tangente à la courbe au point $A(a; f(a))$ a pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Si f est convexe

La courbe est au-dessus de sa tangente.

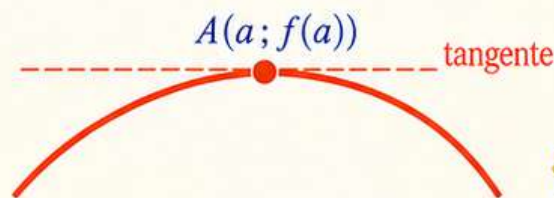
$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$$



Si f est concave

La courbe est en dessous de sa tangente.

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a)$$



Ces inégalités sont valables pour tout x dans I .

Exemple corrigé : l'exponentielle

Démontrer que, pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$.

On pose $f(x) = e^x$.

1 Convexité

$$f'(x) = e^x \text{ et } f''(x) = e^x > 0.$$

f est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

2 Tangente en 0

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 1.$$

La tangente en 0 a pour équation $y = 1 + x$.

3 Inégalité

La courbe est au-dessus de cette tangente.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} : e^x \geq 1 + x.$$

L'égalité est obtenue uniquement pour $x = 0$.

Autre exemple : le logarithme

On pose $g(x) = \ln x$, pour $x > 0$.

$$g'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

g est donc concave sur $]0; +\infty[$.

$g(1) = 0$ et $g'(1) = 1$: la tangente en 1 a pour équation $y = x - 1$.
La courbe est en dessous de cette tangente.

$$\text{Pour tout } x > 0 : \ln x \leq x - 1.$$

L'égalité est obtenue uniquement pour $x = 1$.

La méthode

- 1 Vérifier la convexité ou la concavité.
- 2 Calculer l'équation d'une tangente bien choisie.
- 3 Conclure en comparant la courbe à cette tangente.

Continuité et convexité

6. Une étude complète de convexité

Énoncé

On considère $f(x) = xe^{-x}$, définie sur $\mathbb{R}$.

Étudier sa convexité, déterminer son point d'inflexion et l'équation de la tangente en ce point.

1 Calculer les deux dérivées

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

$$f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$$

On utilise la dérivée d'un produit et $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

2 Étudier le signe de f''

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$.

$f''(x)$ a donc le même signe que $x-2$.

Valeurs de x	$x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
e^{-x}	+	+	+
$x-2$	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+

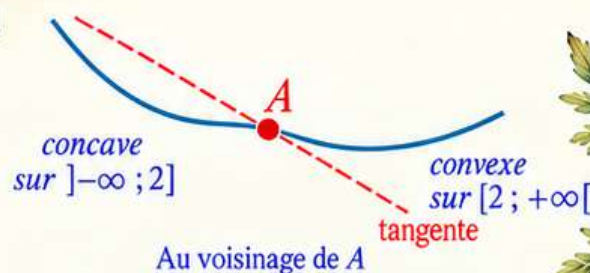
f est concave sur $] -\infty ; 2]$ et convexe sur $[2 ; +\infty [$.

3 Déterminer le point d'inflexion

$f''(2) = 0$ et f'' change de signe en 2.

$f(2) = 2e^{-2}$.

$A(2 ; 2e^{-2})$ est un point d'inflexion.



4 Calculer l'équation de la tangente

$f'(2) = -e^{-2}$.

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) \quad y = -e^{-2}(x-2) + 2e^{-2}$$

$$y = e^{-2}(4-x)$$

La démarche

- 1 Deux dérivées $\rightarrow$ signe de $f'' \rightarrow$ convexité.
- 2 Un changement de signe permet de repérer l'inflexion.
- 3 Utiliser $f(a)$ et $f'(a)$ pour les coordonnées et la tangente.

Continuité et convexité

7. La méthode de dichotomie

1 Couper l'intervalle en deux

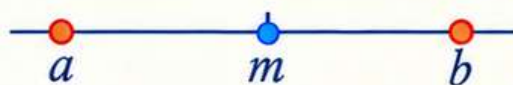
On suppose f continue et strictement croissante sur $[a; b]$, avec $f(a) < 0 < f(b)$.

Il existe une unique solution α de $f(x) = 0$ dans $]a; b[$.

On calcule le milieu :

$$m = \frac{a + b}{2}$$

- Si $f(m) < 0$: on remplace a par m .
- Si $f(m) > 0$: on remplace b par m .
- Si $f(m) = 0$: $\alpha = m$, la solution est trouvée.



2 Exemple corrigé : $f(x) = x^3 + x - 1$

f est continue sur $[0; 1]$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$.

On part donc de $[0; 1]$.

Étape	Milieu m	Signe de $f(m)$	Nouvel intervalle
1	0,5	—	$[0,5; 1]$
2	0,75	+	$[0,5; 0,75]$
3	0,625	—	$[0,625; 0,75]$
4	0,6875	+	$[0,625; 0,6875]$

Après 10 subdivisions :
 $0,681640625 < \alpha < 0,6826171875$

3 Quelle précision ?

L'amplitude est divisée par 2 à chaque subdivision.

À partir de $[0; 1]$, elle vaut $\frac{1}{2^n}$ après n subdivisions.

$$\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < 10^{-3}$$

10 subdivisions suffisent pour une amplitude inférieure à 0,001.

4 Un algorithme Python

Ce programme applique la méthode à la fonction de l'exemple.

```
def f(x):
    return x**3 + x - 1
a, b = 0.0, 1.0
eps = 0.001
while b - a > eps:
    m = (a + b) / 2
    if f(m) == 0:
        a, b = m, m
    elif f(m) < 0:
        a = m
    else:
        b = m
print(a, b)
```

À retenir

- Conserver un intervalle contenant la solution.
- Répéter jusqu'à obtenir la précision voulue.

Continuité et convexité

8. L'essentiel à retenir

1 Continuité, existence et unicité

Continuité en un point

f est continue en $a \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Théorème des valeurs intermédiaires

f est continue sur $[a ; b]$ et k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors il existe **au moins un** réel $c \in [a ; b]$ tel que $f(c) = k$.

Si f est aussi strictement monotone sur $[a ; b]$,
cette solution est unique.

2 Convexité et concavité

Pour une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I :

Fonction	Critères sur I	Position de la courbe
Convexe	f' croissante $f'' \geq 0$	Au-dessus des tangentes Sous ses cordes
Concave	f' décroissante $f'' \leq 0$	En dessous des tangentes Au-dessus de ses cordes

Une fonction affine est à la fois convexe et concave.

3 Point d'inflexion

Si f'' s'annule et change de signe en un point intérieur a de I :

$A(a ; f(a))$ est un **point d'inflexion**.

4 Équation d'une tangente

Au point $A(a ; f(a))$:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

5 Deux rédactions types

Rédaction avec le TVI

f est continue sur $[a ; b]$. Le réel k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Par le TVI, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a ; b]$.

Rédaction sur la convexité

Sur I , $f''(x) \geq 0$. La fonction f est donc convexe sur I .

On vérifie les hypothèses avant de conclure.

6 Dichotomie

- Conserver un intervalle contenant la solution et le partager en deux.
- L'amplitude est divisée par 2 à chaque subdivision.

⚠ Les pièges à éviter

- Continue ne signifie pas dérivable.
- Le TVI seul ne garantit pas l'unicité.
- $f''(a) = 0$ ne suffit pas pour une inflexion.
- Croissance et convexité sont deux notions différentes.