



Notations

- I : intervalle de $\mathbb{R}$
- f : fonction définie sur I
- $a \in I$: point de I
- $\mathcal{C}_f$: courbe représentative de f

1 Continuité d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I .

f est continue en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

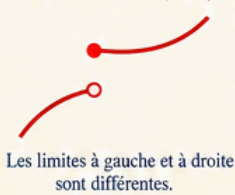
f est continue sur I si elle est continue en tout point de I .

Interprétation graphique

Fonction continue



Discontinuité (saut)



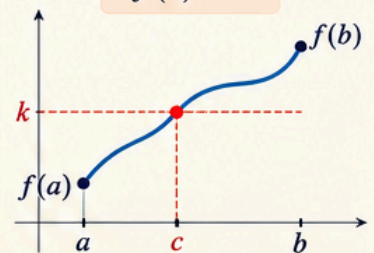
2 Fonction usuelles continues

Fonction	Intervalle de continuité
Polynômes	$\mathbb{R}$
Fonction racine $x \mapsto \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$
Fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$	$] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$
Fonction exponentielle $x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
Fonction logarithme $x \mapsto \ln x$	$] 0; +\infty[$
Fonctions trigonométriques $x \mapsto \sin x, \quad x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
Fonctions composées	Continues sur l'ensemble où elles sont définies.

3 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ avec $a < b$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c dans $[a; b]$ tel que :

$$f(c) = k$$



Unicité : Si f est de plus strictement monotone sur $[a; b]$, la solution est unique.

4 Dérivabilité et continuité

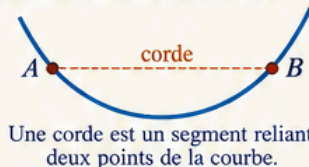
Propriété

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .
La réciproque est fautive (ex. : $x \mapsto |x|$).

5 Convexité et concavité

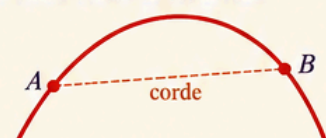
Fonction convexe sur un intervalle I

La courbe est au-dessus de ses tangentes.
Elle est en dessous de ses cordes.



Fonction concave sur un intervalle I

La courbe est en dessous de ses tangentes.
Elle est au-dessus de ses cordes.



6 Critères de convexité (avec la dérivée seconde)

Si f est deux fois dérivable sur un intervalle I :

Fonction f	Variation de f'	Signe de f''	Position de la courbe
Convexe	f' croissante	$f'' \geq 0$	Au-dessus des tangentes (sous ses cordes)
Concave	f' décroissante	$f'' \leq 0$	En dessous des tangentes (au-dessus de ses cordes)

Une fonction affine est à la fois convexe et concave.

7 Point d'inflexion

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.

$A(a; f(a))$ est un point d'inflexion si f'' s'annule en a et change de signe en a .



Attention : $f''(a) = 0$ ne suffit pas !

8 Tangente à la courbe

Si f est dérivable en a , la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(a; f(a))$ a pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

9 Inégalités liées à la convexité

Si f est convexe sur I

Pour tout $x \in I$:

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$$

La courbe est au-dessous de ses tangentes.

Si f est concave sur I

Pour tout $x \in I$:

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a)$$

La courbe est en dessous de ses tangentes.

10 Méthode de dichotomie (résolution $f(x) = 0$ sur $[a; b]$)

- On suppose f continue et strictement monotone sur $[a; b]$ avec $f(a) < 0 < f(b)$.
- On prend le milieu $m = \frac{a+b}{2}$.
- On remplace a ou b par m selon le signe de $f(m)$.
- On répète jusqu'à obtenir la précision voulue.

11 Précision de la dichotomie

- Après n subdivisions, l'amplitude de l'intervalle est :

$$\frac{b-a}{2^n}$$

- Pour une précision de 10^{-p} : il faut n tel que

$$\frac{b-a}{2^n} \leq 10^{-p}$$

12 Points clés à retenir

- La continuité relie une limite à la valeur de la fonction.
- Une dérivabilité implique la continuité.
- Le TVI garantit l'existence (et parfois l'unicité) d'une solution.
- La convexité/concavité se lit avec f'' .
- Un point d'inflexion correspond à un changement de convexité.
- Pour comparer une courbe à une tangente, on utilise la convexité et les inégalités.
- La méthode de dichotomie permet d'approcher numériquement une solution.