

I. Limites à l'infini

1 Limite finie à l'infini

Définition

On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si, pour tout intervalle ouvert I contenant L , il existe un réel A tel que pour tout $x \geq A$, $f(x) \in I$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

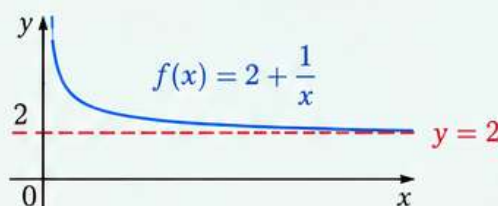
On définit de même la limite L en $-\infty$.

Interprétation graphique

Lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe représentative de f se rapproche de la droite d'équation $y = L$.

Exemple

La fonction $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ admet pour limite 2 en $+\infty$.



Définition

La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

On définit de même l'asymptote horizontale en $-\infty$.

2 Limite infinie à l'infini

Définitions

- On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si, pour tout réel a , il existe un réel A tel que pour tout $x \geq A$, $f(x) > a$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- On dit que f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si, pour tout réel b , il existe un réel A tel que pour tout $x \geq A$, $f(x) < b$.

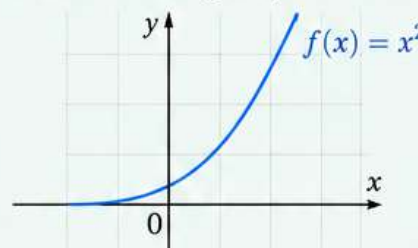
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Remarques

- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.
- Il existe des fonctions qui n'admettent pas de limite (finie ou infinie) à l'infini. C'est le cas des fonctions sinusoïdales, par exemple $f(x) = \sin x$.

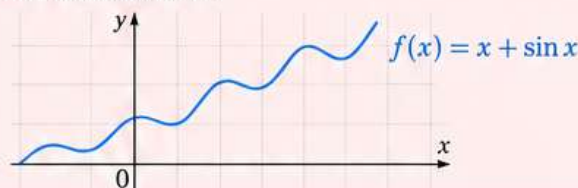
Exemple 1

La fonction $f(x) = x^2$ admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (car ses valeurs deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand).



Exemple 2

La fonction $f(x) = x + \sin x$ admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ mais n'est pas croissante.



3 Limites des fonctions usuelles à l'infini

Les limites suivantes sont à connaître et à savoir utiliser.

Fonction	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
Constante k	k	k
x	$+\infty$	$-\infty$
x^2	$+\infty$	$+\infty$
x^3	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{1}{x}$	0	0

Fonction	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
$\frac{1}{x^2}$	0	0
$\sqrt{x}$	$+\infty$	(non définie)
e^x	$+\infty$	0
$\ln x$	$+\infty$	(non définie)
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0	(non définie)

II. Limite d'une fonction en un réel A

1 Limites infinies en un réel A

Définitions

- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si, pour tout réel a , il existe un intervalle autour de A tel que pour tout x suffisamment proche de A , $f(x) > a$.

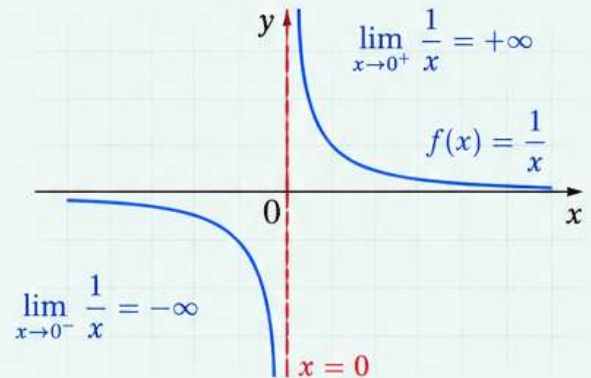
$$\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$$

- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en A si, pour tout réel b , il existe un intervalle autour de A tel que pour tout x suffisamment proche de A , $f(x) < b$.

$$\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$$

Exemple

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une limite infinie en 0.



On parle de limite à gauche de A ($x < A$) et de limite à droite de A ($x > A$).

2 Asymptote verticale

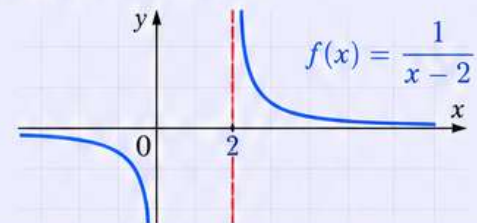
Définition

La droite d'équation $x = A$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de f si

$$\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty.$$

Exemple

La courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x-2}$ admet la droite $x = 2$ comme asymptote verticale.



3 Limite finie en un réel A

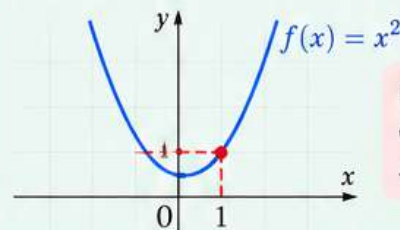
Définition

On dit que la fonction f admet pour limite L en A si, pour tout intervalle ouvert I contenant L , il existe un intervalle autour de A tel que pour tout x suffisamment proche de A , $f(x) \in I$.

$$\lim_{x \rightarrow A} f(x) = L$$

Exemple

La fonction $f(x) = x^2$ admet pour limite 1 en $A = 1$.



La courbe se rapproche de la hauteur 1 lorsque x est proche de 1.

4 Limites à gauche et à droite

Définition

On peut définir des limites différentes selon que x tend vers A par valeurs inférieures (à gauche) ou par valeurs supérieures (à droite). On note :

$$\lim_{x \rightarrow A^-} f(x)$$

limite à gauche de A

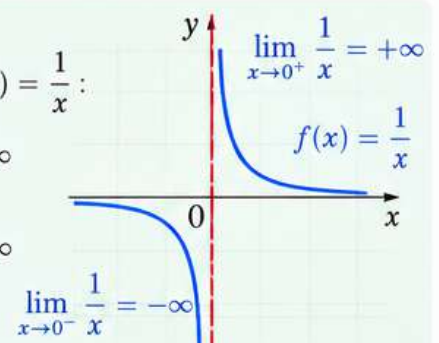
$$\lim_{x \rightarrow A^+} f(x)$$

limite à droite de A

Exemple

Pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$



IV. Règles de calcul et cas particuliers

1 Règles de calcul sur les limites

Propriété

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel α (α peut être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$).

Si les limites de f et g existent en α , alors :

- $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \times \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$
- si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)}$.

Tableau récapitulatif (somme)

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x))$
L	L'	$L + L'$
L	$+\infty$	$+\infty$
L	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Formes indéterminées (somme)

On obtient une forme indéterminée (F.I.) lorsque l'on ne peut pas conclure sur la limite avec les seules règles de calcul.

Dans ces cas, il faut utiliser d'autres méthodes : factorisation, mise sous forme adaptée, comparaison, quotient par le terme dominant, etc.

2 Limite d'un produit

Propriété

Si les limites de f et g existent en α , alors la limite du produit $f \times g$ existe et

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \times \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$$

Tableau récapitulatif (produit)

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) \times g(x))$
L	L'	$L \times L'$
L	$+\infty$	$+\infty$ si $L > 0$ $-\infty$ si $L < 0$
L	$-\infty$	$-\infty$ si $L > 0$ $+\infty$ si $L < 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0	$L' \neq 0$	0
0	$+\infty$	F.I.
0	$-\infty$	F.I.

Attention

- $0 \times (+\infty)$ et $0 \times (-\infty)$ sont des formes indéterminées.
- Le signe du produit dépend du signe des limites quand l'une des limites est infinie et l'autre est un réel non nul.

3 Limite d'un quotient

Propriété

Si les limites de f et g existent en α et si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) \neq 0$, alors la limite du quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ existe et

$\frac{f(x)}{g(x)}$ existe et

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)}$$

Tableau récapitulatif (quotient)

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$L' \neq 0$	$\frac{L}{L'}$
L	$+\infty$	0
L	$-\infty$	0
$+\infty$	$L' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$L' < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$L' > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$L' < 0$	$+\infty$
0	$L' \neq 0$	0
0	$+\infty$	0
0	$-\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.
0	0	F.I.

Formes indéterminées (quotient)

Les formes indéterminées que l'on rencontre pour un quotient sont notamment :

- ∞/∞
- $0/0$
- (plus généralement, lorsque la limite du dénominateur est nulle).

Attention

On ne peut pas diviser par 0. Si la limite du dénominateur est nulle, il faut étudier la limite plus précisément : factorisation, simplification, comparaison, etc.

4 Exemples de calcul de limites

Exemple 1 (somme)

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 5x + 1)$.

Solution

On utilise la règle de la somme et les limites usuelles :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 5x + 1) = +\infty$.

Exemple 2 (quotient)

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{5 + \frac{1}{x}}$.

Solution

On utilise les règles de quotient et les limites usuelles :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 1) = +\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right) = 5$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$).

Comme la limite du dénominateur est non nulle, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{5 + \frac{1}{x}} = \frac{+\infty}{5} = +\infty.$$

V. Asymptotes et interprétation graphique

1 Asymptote horizontale

Définition

La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative C_f de la fonction f en $+\infty$ si

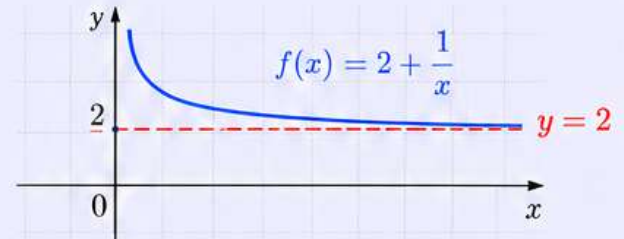
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L.$$

On définit de même l'asymptote horizontale en $-\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

Exemple

La fonction $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ admet la droite $y = 2$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.



2 Asymptote verticale

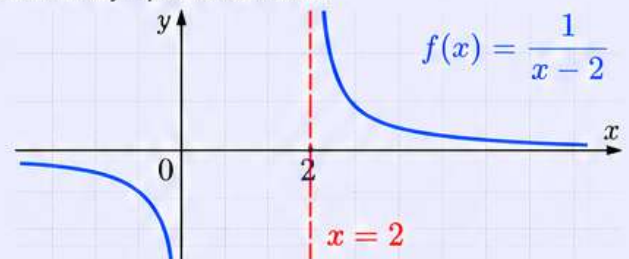
Définition

La droite d'équation $x = A$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative C_f de la fonction f si

- $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$;
- Plus généralement, si f admet une limite à droite ou une limite à gauche en A égale à $+\infty$ ou $-\infty$, alors la droite $x = A$ est une asymptote verticale.

Exemple

La fonction $f(x) = \frac{1}{x-2}$ admet la droite $x = 2$ comme asymptote verticale.



3 Exemple : étude complète d'une fonction homographique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}.$$

Objectifs

- Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et en déduire l'asymptote horizontale éventuelle.
- Déterminer les limites de f à gauche et à droite de 2 et en déduire l'asymptote verticale.
- Tracer la courbe pour illustrer les résultats.

1. Limites à l'infini et asymptote horizontale

On effectue la division euclidienne de $3x+1$ par $x-2$.

$$3x+1 = 3(x-2) + 7$$

$$\text{donc } f(x) = 3 + \frac{7}{x-2}.$$

- Limite en $+\infty$:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x-2} = 0, \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

- Limite en $-\infty$:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{x-2} = 0, \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3.$$

Conclusion : la courbe C_f admet la droite d'équation $y = 3$ comme **asymptote horizontale** en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Limites au voisinage de 2 et asymptote verticale

- Limite à gauche de 2 ($x \rightarrow 2^-$) :**

Lorsque $x \rightarrow 2^-$, on a :

- $3x+1 \rightarrow 7 > 0$,
- $x-2 \rightarrow 0^-$ (dénominateur négatif).

Par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty.$$

- Limite à droite de 2 ($x \rightarrow 2^+$) :**

Lorsque $x \rightarrow 2^+$, on a :

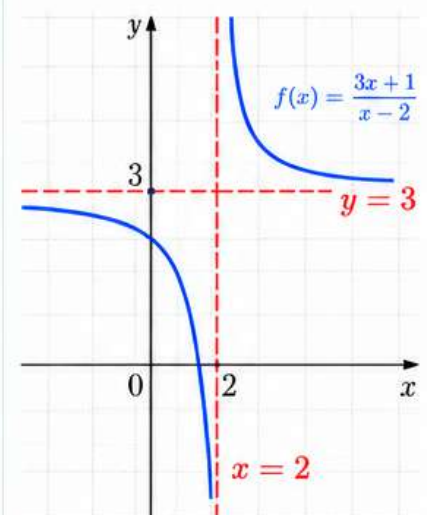
- $3x+1 \rightarrow 7 > 0$,
- $x-2 \rightarrow 0^+$ (dénominateur positif).

Par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$

Conclusion : la droite $x = 2$ est une **asymptote verticale** à la courbe C_f .

3. Représentation graphique



VI. Formes indéterminées et comment les lever

1 Qu'est-ce qu'une forme indéterminée ?

Définition

Lorsqu'on calcule la limite d'une fonction en remplaçant directement x par la valeur considérée, on peut obtenir une **forme indéterminée**. Cela signifie que l'on ne peut pas conclure sur la limite et qu'il faut utiliser d'autres méthodes (factorisation, simplification, développement, quotient ...).

Principales formes indéterminées (et celles traitées dans ce cours)

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

Méthodes pour lever une forme indéterminée

- Factoriser.
- Simplifier une fraction.
- Mettre au même dénominateur.
- Développer.
- Utiliser des identités remarquables.
- Transformer l'expression.
- (Éventuellement) encadrer certaines expressions.

2 La forme indéterminée $\frac{0}{0}$

Méthode

Lorsque l'on obtient $\frac{0}{0}$, on essaie de factoriser, puis de simplifier avant de calculer la limite.

Si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ et $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = 0$,

alors on factorise et on simplifie avant de calculer la limite.

Exemple 1

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

On factorise le numérateur :

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Pour $x \neq 2$: $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$.

Conclusion : la limite vaut 4.

Exemple 2

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

On reconnaît une forme $0/0$.

On utilise l'identité :

$$x - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1).$$

Pour $x \neq 1$: $\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$.

Conclusion : la limite vaut $\frac{1}{2}$.

3 La forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$

Méthode

Lorsque l'on obtient $\frac{\infty}{\infty}$, on essaie de :

- simplifier en divisant par la plus grande puissance de x ;
- ou factoriser et simplifier ;
- ou transformer l'expression.

Exemple 1 : fraction rationnelle (degré 3 sur degré 2)

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{x^2 + 3x}$.

On factorise x^2 au dénominateur :

$$\frac{2x^3 - 5x + 1}{x^2 + 3x} = \frac{x^2(2x - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{3}{x})}$$

Pour $x \neq 0$: $\frac{2x^3 - 5x + 1}{x^2 + 3x} = \frac{2x - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x}}$.

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\frac{5}{x} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$ et $\frac{3}{x} \rightarrow 0$,

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{x^2 + 3x} = \frac{2}{1} = 2$.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{x^2 + 3x} = 2$.

Conclusion : la limite vaut 2 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exemple 2 : autre fraction rationnelle

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{5x - 1}$.

On divise le numérateur et le dénominateur par x (la plus grande puissance de x) :

$$\frac{2x + 3}{5x - 1} = \frac{2 + \frac{3}{x}}{5 - \frac{1}{x}}$$

Comme $\frac{3}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{x} \rightarrow 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{5x - 1} = \frac{2}{5}$$

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{5x - 1} = \frac{2}{5}$.

Conclusion : la limite vaut $\frac{2}{5}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Règle

En $+\infty$ ou $-\infty$, un quotient de polynômes a la même limite que le quotient des termes de plus haut degré.

4 La forme indéterminée $\infty - \infty$

Méthode

Pour lever une forme $\infty - \infty$, on met au même dénominateur, on factorise ou on utilise un développement (identités remarquables, etc.).

Exemple 1 : limite d'un polynôme

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4 + 5x^2 - 6x + 1)$.

On factorise x^4 :

$$-3x^4 + 5x^2 - 6x + 1 = x^4 \left(-3 + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right)$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\frac{5}{x^2} \rightarrow 0$, $\frac{6}{x^3} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{x^4} \rightarrow 0$,

donc $-3 + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x^4} \rightarrow -3$.

Comme $x^4 \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4 + 5x^2 - 6x + 1) = -\infty$$

Conclusion : la limite vaut $-\infty$.

Exemple 2

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

On utilise la conjugaison :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1 - 1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$$

Comme $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \rightarrow +\infty$,

on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$.

Conclusion : la limite vaut 0.

Règle

En $+\infty$ ou $-\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré.

Remarques – Pour aller plus loin ... (autres formes indéterminées)

• La forme $0 \times \infty$

On transforme en une fraction (ou on factorise).

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$.

On écrit $x e^{-x} = \frac{x}{e^x}$. Comme $e^x \rightarrow +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$.

• La forme 0^0

On passe par l'écriture exponentielle.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

On écrit $x^x = e^{x \ln x}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$.

• La forme 1^∞ (et ∞^0)

On passe par l'écriture exponentielle.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

On écrit $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

VII. Composition de limites

1 Principe général

Propriété

Si g admet une limite L en a (ou en $\pm\infty$) et si f est continue en L , alors la fonction composée $f \circ g$ admet une limite en a (ou en $\pm\infty$) donnée par :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(L).$$

Exemple 1

On considère $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$ et $g(x) = x^2 + 1$.

On cherche $\lim_{x \rightarrow 2} f(g(x))$.

- On commence par calculer la limite de g en 2 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5.$$

- La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est continue en 5, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(g(x)) = f(5) = \sqrt{5}.$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{5}.$

2 Composition avec une limite infinie

Propriété

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et si l'on connaît le comportement de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ (ou $x \rightarrow -\infty$), alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \quad (\text{ou } \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)).$$

Exemple 2

On considère $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.
On cherche $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x))$.

- $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ (car $(x-1)^2 > 0$).

- On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t} = +\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = +\infty$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}} = +\infty.$

3 Cas particuliers et précautions

Points importants

Il faut toujours :

- déterminer la limite de $g(x)$;
- vérifier que la fonction f est continue en cette valeur (ou connaître sa limite en $+\infty$ ou $-\infty$) ;
- tenir compte du domaine de définition de f : la limite doit être compatible avec ce domaine.

Exemple 3 (fonction définie sur un intervalle)

On considère $f(x) = \ln(x)$ définie sur $]0; +\infty[$ et $g(x) = x^2 + 1$.

On cherche $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(g(x))$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$.

- On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$.

Exemple 4 (attention au domaine)

On considère $f(x) = \sqrt{x-1}$ définie sur $[1; +\infty[$ et $g(x) = x^2$.

On cherche $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.
- La fonction f est continue en 0 ? Non, car f n'est pas définie en 0 (son domaine est $[1; +\infty[$).

Conclusion : la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 1}$ n'existe pas, car $g(x)$ tend vers 0 qui n'appartient pas au domaine de f .

4 Exemples d'applications classiques

Exemple 5

On considère $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

On cherche $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(g(x))$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.
- La fonction $\ln$ est continue en 0 ? Non, mais on connaît sa limite en 0^+ :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty.$$

- Comme $g(x) > 0$ pour $x > 0$, on a $g(x) \rightarrow 0^+$.

- Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$.

Exemple 6

On considère $f(x) = e^x$ et $g(x) = -x^2$.

On cherche $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(g(x))$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$.

- On sait que $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$.

Exemple 7

On considère $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

On cherche $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(g(x))$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$.

- On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0$.

- Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0$.

À retenir

- Si $g(x) \rightarrow L$ en a (ou en $\pm\infty$) et si f est continue en L , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(L)$.
- Si $g(x) \rightarrow +\infty$ (ou $-\infty$) et si l'on connaît $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)$.
- Toujours vérifier le domaine de définition de f et que la limite de g est compatible avec ce domaine.

1 Le théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

Théorème (des gendarmes)

Soient f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle I privé éventuellement d'un point a ($a \in \bar{I}$).

S'il existe un voisinage de a (ou de $+\infty$, ou de $-\infty$) tel que, pour tout x de ce voisinage (avec $x \neq a$ si nécessaire),

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$
(avec $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$),

alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Exemple 1

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \left(\frac{1}{x} \right)$.

- Pour tout $x \neq 0$, on sait que $-1 \leq \sin \left(\frac{1}{x} \right) \leq 1$.
- En multipliant par $|x|$ (positif), on obtient :

$$-|x| \leq x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \leq |x|.$$

- Or $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.
- Donc, par le théorème d'encadrement,

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \left(\frac{1}{x} \right) = 0$.

2 Le théorème de comparaison

Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I , avec $b \in \bar{I} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

On suppose que, dans un voisinage de b (suffisamment grand si $b = +\infty$ ou $b = -\infty$), la fonction f est majorée ou minorée par la fonction g .

- Si, pour tout x de ce voisinage,

$$f(x) \leq g(x)$$

et si $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$,

alors $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = +\infty$.

- Si, pour tout x de ce voisinage,

$$f(x) \leq g(x)$$

et si $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = -\infty$,

alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$.

Exemple 1 : limite d'une somme en $+\infty$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 8x \sin x)$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $-8x \leq -8x \sin x \leq 8x$.
- On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 - 8x \leq x^2 - 8x \sin x \leq x^2 + 8x.$$

- Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 8x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 8x) = +\infty$ (car x^2 est le terme dominant).

Donc, par le théorème d'encadrement (ou de comparaison),

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 8x \sin x) = +\infty$.

Exemple 2 : limite d'une somme en $-\infty$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 + 8x^4 \cos x)$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $-8x^4 \leq 8x^4 \cos x \leq 8x^4$.
- On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$3x^5 - 8x^4 \leq 3x^5 + 8x^4 \cos x \leq 3x^5 + 8x^4.$$

- Or, lorsque $x \rightarrow -\infty$,
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 - 8x^4) = -\infty$ (car $3x^5$ est le terme dominant)
 - et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 + 8x^4) = -\infty$.

Donc, par le théorème d'encadrement (ou de comparaison),

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 + 8x^4 \cos x) = -\infty$.

IX. Compléments sur la dérivation

1 Dérivée d'une fonction composée

Théorème

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I , la fonction composée $f \circ g$ est dérivable sur I et

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x)).$$

Autrement dit, on dérive la fonction extérieure et on multiplie par la dérivée de la fonction intérieure.

Exemple 1

On considère $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 3x^2 - 1$.
On détermine la dérivée de $h = f \circ g$.

- f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
- g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 6x$.
- La fonction h est dérivable sur $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 1 > 0\}$.
- Pour tout x de cet intervalle,
$$h'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) = 6x \times \frac{1}{2\sqrt{3x^2 - 1}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 - 1}}.$$

Exemple 2

On considère $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2x^2 + 5x$.
On détermine la dérivée de $h = f \circ g$.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x$.
- g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 4x + 5$.
- Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$h'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) = (4x + 5)e^{2x^2 + 5x}.$$

2 Cas particuliers classiques

a) Dérivée de $\sqrt{u}$

Formule

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et

$$(\sqrt{u})'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

Exemple

On considère $u(x) = 3x^2 + 1$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 1}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}.$$

b) Dérivée de u^n (n entier naturel)

Formule

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u une fonction dérivable sur un intervalle I .
Alors la fonction u^n est dérivable sur I et

$$(u^n)'(x) = nu(x)^{n-1}u'(x).$$

Exemple

On considère $u(x) = 5x - 2$.
On détermine la dérivée de $f(x) = (5x - 2)^4$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 5$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$f'(x) = 4(5x - 2)^3 \times 5 = 20(5x - 2)^3.$$

Cas particulier $n = 2$

$$(u^2)'(x) = 2u(x)u'(x).$$

Par exemple, si $u(x) = x^2 + 3x$,
alors $(u^2)'(x) = 2(x^2 + 3x)(2x + 3)$.

c) Dérivée de e^u

Formule

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .
Alors la fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

Exemple

On considère $u(x) = x^3 - 4x$.
On détermine la dérivée de $f(x) = e^{x^3 - 4x}$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 3x^2 - 4$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = (3x^2 - 4)e^{x^3 - 4x}.$$

3 Tableau récapitulatif

Fonction	Formule de dérivation (avec u dérivable)	Conditions	Exemple
$\sqrt{u}$	$(\sqrt{u})'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$u(x) > 0$ sur l'intervalle	Si $u(x) = 3x^2 + 1$, $(\sqrt{u})'(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$
u^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$(u^n)'(x) = nu(x)^{n-1}u'(x)$	aucune condition particulière	Si $u(x) = 5x - 2$, $(u^4)'(x) = 20(5x - 2)^3$
e^u	$(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$	aucune condition particulière	Si $u(x) = x^3 - 4x$, $(e^u)'(x) = (3x^2 - 4)e^{x^3 - 4x}$

À retenir

- La dérivée d'une fonction composée se calcule avec la formule : $(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$.
- Les formules de dérivation de $\sqrt{u}$, u^n et e^u sont des cas particuliers très fréquents : bien vérifier les conditions (domaine).