

Limites de fonctions et dérivation

Fiche d'exercices n°1 – Corrigé

Limites et calculs fondamentaux

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$



1 Limites usuelles et calculs directs

Exercice 1 – Corrigé

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5 = 5$
(constante)
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

Exercice 2 – Corrigé

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 7) = +\infty$
(terme dominant $3x$)
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 5) = -\infty$
(terme dominant $-2x$)
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2 - 3x + 1) = +\infty$
(terme dominant $4x^2$)
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 2x - 1) = -\infty$
(terme dominant $-x^2$)

Exercice 3 – Corrigé

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+3} = 0$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Exercice 4 – Corrigé

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$
($\simeq |x|$)
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x} = +\infty$
($\simeq |x|$)
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + 1) = +\infty$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) = 0$

Exercice 5 – Corrigé

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = +\infty$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n = 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

2 Opérations sur les limites

Exercice 6 – Corrigé

On donne : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -2$.

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = 3 + (-2) = 1$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2f(x) - 3g(x)) = 2 \times 3 - 3 \times (-2) = 12$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \times g(x)) = 3 \times (-2) = -6$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$

Exercice 7 – Corrigé

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+3} = 2$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+5}{-2x+1} = -\frac{3}{2}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = -\infty$
($\simeq x$)

Exercice 8 – Corrigé

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x} = 0$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{x}} = +\infty$ ($\simeq 3\sqrt{x}$)
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{x}+1} = +\infty$ ($\simeq x^{3/2}$)
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-3x}{\sqrt{x^2+1}} = +\infty$ ($\simeq \frac{3x}{|x|} = 3$)

Exercice 9 – Corrigé

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x^2+1} = 0$
(degré 1 < degré 2)
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-1}{2x^3+5} = \frac{1}{2}$
(termes de degré 3)
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-1}{5x^2-3x+2} = \frac{1}{5}$
(termes de degré 2)
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2-x+1}{x^2+2x-3} = 4$
(termes de degré 2)

3 Polynômes et terme dominant

Exercice 10 – Corrigé

Deux limites en $+\infty$ conduisent $+\infty$ et $+\infty$:

- a) $f(x) = 2x^3 - 5x + 1$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- b) $g(x) = -4x^4 + 3x^2 - 7x + 2$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$
- c) $h(x) = x^5 + 2x^3 - 1$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$
- d) $k(x) = -3x^6 + x^2 + 4$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = -\infty$

Exercice 11 – Corrigé

- a) $f(x) = (3x^3 - 2x + 1)(x - 5)$
 $\simeq 3x^4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- b) $g(x) = (x^2 + 1)(2x^3 - x + 4)$
 $\simeq 2x^5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- c) $h(x) = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$
- d) $k(x) = (2x + 3)^4 - (2x - 1)^4$
 $\simeq 64x^3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$

Exercice 12 – Corrigé

- $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 5x - 1}{x^2 - 3x + 1}$
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 $\frac{3x^3}{x^2} \simeq 3x$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 $\frac{3x^3}{x^2} \simeq 3x$

Exercice 13 – Corrigé

- $g(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{3x^2 + x - 5}$
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
($\frac{x^4}{3x^2} \simeq \frac{1}{3}x^2$)
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$
($\frac{x^4}{3x^2} \simeq \frac{1}{3}x^2$)

4 Fractions rationnelles et exercice bilan

Exercice 14 – Corrigé

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{5x^2 - x + 4} = \frac{3}{5}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 1}{x^3 + 5x} = -2$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 2x^2 - 1}{-x^3 + 3x - 2} = -4$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2 - 1} = 1$

Exercice 15 – Corrigé

- $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2}$
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
($\simeq 2x$)
- c) Asymptote horizontale ?
Non : la limite en $\pm\infty$ n'est pas finie
(la fonction admet une asymptote oblique).



Exercice bilan – Corrigé

- $h(x) = \frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 + 1}$
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$
- c) $h(x) = \frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 + 1} = x - \frac{4x - 1}{x^2 + 1}$
avec $r(x) = \frac{4x - 1}{x^2 + 1}$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} r(x) = 0$
- d) Asymptote oblique : $y = x$.