



1 Limites en un réel et limites à gauche et à droite

Exercice 1 - Corrigé

Déterminer les limites suivantes.

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4$
- b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)} = -1$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)} = 3$

Exercice 2 - Corrigé

Déterminer les limites suivantes.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
 $(1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2})$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
 $(e^x - 1 \sim x)$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
 $(\ln(1+x) \sim x)$

Exercice 3 - Corrigé

Déterminer les limites à gauche et à droite, puis la limite (si elle existe).

- a) $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$
 $\Rightarrow$ la limite n'existe pas.
- b) $g(x) = \frac{1}{x+2}$
 $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = +\infty$
 $\Rightarrow$ la limite n'existe pas.
- c) $h(x) = \sqrt{x-1}$
 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 0$ (définie pour $x > 1$)
- d) $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = +\infty$ (définie pour $x > 2$)

Exercice 4 - Corrigé

Étudier la limite en 0 des fonctions suivantes.

- a) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$
 $(1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2})$
- b) $g(x) = \frac{\sin 2x}{x^2}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$
 $(\sin 2x \sim 2x)$
- c) $h(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \frac{1}{2}$
 $(e^x - 1 - x \sim \frac{x^2}{2})$
- d) $k(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = -\frac{1}{2}$
 $(\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))$

2 Asymptotes verticales et horizontales

Exercice 5 - Corrigé

Étudier les asymptotes (verticales et horizontales).

- a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ | AV : $x = 2$; AH : $y = 0$
- c) $h(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ | AV : $x = -1$ et $x = 1$; AH : $y = 0$
- b) $g(x) = \frac{2x+1}{x^2-1}$
- d) $k(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+x}$ | AV : $x = 0$ et $x = -1$; AH : $y = 2$

Exercice 6 - Corrigé

Étudier les asymptotes (verticales et horizontales).

- a) $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$ | AV : $x = -1$; AH : $y = 3$
- c) $h(x) = \frac{5x^2-3x+1}{x^2-4}$ | AV : $x = -2$ et $x = 2$; AH : $y = 5$
- b) $g(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$ | AV : $x = 2$; pas d'AH
- d) $k(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x+1}$ | AV : $x = 1$; AH : $y = 0$

Exercice 7 - Corrigé

Étudier les asymptotes (verticales et horizontales).

- a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ | Pas d'AV ; pas d'AH
 $(f(x) \sim |x|, \text{ donc pas de limite finie en } \pm\infty)$
- c) $h(x) = \frac{x-1+\sqrt{x^2+1}}{x}$ | Pas d'AV ; AH : $y = 1$
 $(\sqrt{x^2+1} = x + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}))$
- b) $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ | AV : $x = 1$; AH : $y = 0$
- d) $k(x) = \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}$ | Pas d'AV ; pas d'AH
 $(f(x) \sim |x|, \text{ donc pas de limite finie})$

3 Composition - Comparaison - Théorème des gendarmes

Exercice 8 - Corrigé (Composition)

En utilisant les limites et la continuité, déterminer les limites suivantes.

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x^3) = 0$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x^2} = 1$
- d) $\lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2-1} = 1$

Exercice 9 - Corrigé (Comparaison)

En utilisant un théorème de comparaison, déterminer les limites suivantes.

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x^2+1} = 0$
 $(2x+1) \leq 3x+1 \leq 3x^2$ pour $x \geq 1$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = 0$
(même degré, quotient des coefficients)
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-5x+1}{2x^3+1} = \frac{1}{2}$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-x+1}{x^4+2} = 0$
(degré 2 < degré 4)

Exercice 10 - Corrigé (Gendarmes)

En utilisant le théorème des gendarmes, déterminer les limites suivantes.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
 $(-|x| \leq x \sin(\frac{1}{x}) \leq |x|)$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$
 $(-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x})$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
 $(-x^2 \leq x^2 \cos(\frac{1}{x}) \leq x^2)$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln x = 0$
 $(0 \leq \ln x \leq x \text{ pour } x \geq 1)$

4 Exercice bilan

Exercice 11 - Corrigé

Déterminer les limites suivantes.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$
 $(e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \frac{1}{2}$
 $(\sqrt{x^2+x} = x + \frac{1}{2} + o(1))$
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1-2(x-1)}{(x-1)^2} = 1$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x^2+1} = 0$
(numérateur $\sim \frac{1}{2\sqrt{x}}$, quotient $\rightarrow 0$)

Exercice 12 - Corrigé

Étudier les limites et les asymptotes éventuelles.

- $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-1}$
- Domaine : $x \neq -1, 1$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ (pas d'AV en 1)
 - $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ (AV : $x = -1$)
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ (AH : $y = 1$)

Exercice 13 - Corrigé

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ avec $g(x) = \sqrt{x^2-3x+1}$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ($g(x) \sim x$)
- b) $g(x) = \sqrt{x^2-3x+1} = x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} \sim x - \frac{3}{2}$
- c) Position : $g(x) - (x - \frac{3}{2}) = -\frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$
Pour $x > 0, g(x) < x - \frac{3}{2}$; la courbe est en dessous de l'asymptote oblique $y = x - \frac{3}{2}$.

