



Limites de fonctions et dérivation

Fiche d'exercices n°3

Limites en un réel – Asymptotes – Gendarmes – Comparaison

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Asymptotes

Limites

Gendarmes

1 Limites en un réel et limites à gauche et à droite

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

Exercice 3

Déterminer les limites à gauche et à droite, puis la limite (si elle existe).

- $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$
- $g(x) = \frac{1}{x+2}$
- $h(x) = \sqrt{x-1}$
- $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

Exercice 4

Étudier la limite en 0 des fonctions suivantes.

- $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$
- $g(x) = \frac{\sin 2x}{x^2}$
- $h(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$
- $k(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

2 Asymptotes verticales et horizontales

Exercice 5

Étudier les asymptotes (verticales et horizontales) des fonctions suivantes.

- $f(x) = \frac{1}{x-2}$
- $g(x) = \frac{2x+1}{x^2-1}$
- $h(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$
- $k(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+x}$

Exercice 6

Étudier les asymptotes (verticales et horizontales) des fonctions suivantes.

- $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$
- $g(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$
- $h(x) = \frac{5x^2-3x+1}{x^2-4}$
- $k(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x+1}$

Exercice 7

Étudier les asymptotes (verticales et horizontales) des fonctions suivantes.

- $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
- $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$
- $h(x) = \frac{x-1+\sqrt{x^2+1}}{x}$
- $k(x) = \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}$

3 Composition – Comparaison – Théorème des gendarmes

Exercice 8 – Composition

En utilisant les limites et la continuité, déterminer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x^3)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2-1}$

Exercice 9 – Comparaison

En utilisant un théorème de comparaison, déterminer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x^2+1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-5x+1}{2x^3+1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-x+1}{x^4+2}$

Exercice 10 – Gendarmes

En utilisant le théorème des gendarmes, déterminer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln x$

4 Exercice bilan

Exercice 11

Déterminer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^3}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x - x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 - 2(x-1)}{(x-1)^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x^2+1}$

Exercice 12

Étudier les limites et les asymptotes éventuelles de :

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-1}$$

Exercice 13

a) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de :

- $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$.
- Montrer que g admet une asymptote oblique en $+\infty$ et préciser son équation.
- Étudier la position de la courbe de g par rapport à cette asymptote.

