

Limites de fonctions et dérivation

Fiche d'exercices n°4 – Corrigé

Dérivation – Variations – Études de fonctions

Dérivation

Variations

Extremums

Étude de fonctions

1 Dérivées et fonctions composées

Exercice 1 – Corrigé

- a) $f(x) = (3x-1)^2$
 $f'(x) = 2(3x-1) \times 3 = 6(3x-1)$
- b) $g(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$
 $g'(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
- c) $h(x) = \frac{1}{2x+1} = (2x+1)^{-1}$
 $h'(x) = -1(2x+1)^{-2} \times 2 = -\frac{2}{(2x+1)^2}$
- d) $k(x) = e^{3x-2}$
 $k'(x) = 3e^{3x-2}$

Exercice 2 – Corrigé

- a) $f(x) = (x^2-4x+1)^3$
 $f'(x) = 3(x^2-4x+1)^2(2x-4)$
- b) $g(x) = \ln(x^2+3x+1)$
 $g'(x) = \frac{1}{x^2+3x+1} \times (2x+3) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$
- c) $h(x) = \sqrt{2x-1} = (2x-1)^{\frac{1}{2}}$
 $h'(x) = \frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$
- d) $k(x) = e^{\sin x}$
 $k'(x) = e^{\sin x} \cos x$

Exercice 3 – Corrigé

- a) $f(x) = \ln(1+x^2)$
 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \times 2x = \frac{2x}{1+x^2}$
- b) $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$
 $g'(x) = e^{\frac{1}{x}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$
- c) $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
 $h'(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1} - x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times 2x)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$
- d) $k(x) = \sin(2x^2)$
 $k'(x) = \cos(2x^2) \times 4x = 4x \cos(2x^2)$

Exercice 4 – Corrigé

- a) $f(x) = (x-1)e^x$
 $f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-1)e^x = xe^x$
- b) $g(x) = \frac{\ln x}{x} = (\ln x)x^{-1}$
 $g'(x) = \frac{1}{x} \cdot x^{-1} + \ln x \cdot (-x^{-2}) = \frac{1-\ln x}{x^2}$
- c) $h(x) = e^{x^2} \sin x$
 $h'(x) = 2xe^{x^2} \sin x + e^{x^2} \cos x = e^{x^2}(2x \sin x + \cos x)$
- d) $k(x) = \sqrt{x} \ln x = x^{\frac{1}{2}} \ln x$
 $k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$

2 Signe de la dérivée et variations simples

Exercice 5 – Corrigé

- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
- a) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.
- b) Signe : $f'(x) > 0$ sur $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$, $f'(x) < 0$ sur $]0; 2[$.
- c) Variations : f est croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]2; +\infty[$, et décroissante sur $]0; 2[$.

Exercice 6 – Corrigé

- $g(x) = -x^3 + 3x + 2$
- a) $g'(x) = -3x^2 + 3 = 3(1-x^2)$.
- b) Signe : $g'(x) > 0$ sur $] -1; 1[$, $g'(x) < 0$ sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.
- c) Variations : g est décroissante sur $]-\infty; -1[$, croissante sur $] -1; 1[$, et décroissante sur $]1; +\infty[$.

Exercice 7 – Corrigé

- $h(x) = x - \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$
- a) $h'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$.
- b) Signe : sur $]0; +\infty[$, $x^2 > 0$ donc $x^2+1 > 0$ et $h'(x) > 0$.
- c) Variations : h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

3 Extremums et problèmes d'optimisation

Exercice 8 – Corrigé

- $f(x) = x^3 - 3x + 1$
- a) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.
- b) Signe : $f'(x) > 0$ sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $f'(x) < 0$ sur $] -1; 1[$.
- c) Extremums : f admet un maximum local en $x = -1$ de valeur $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$, et un minimum local en $x = 1$ de valeur $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$.

Exercice 9 – Corrigé

- $g(x) = x^2 e^{-x}$ sur $]0; +\infty[$
- a) $g'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = e^{-x}(2x - x^2) = xe^{-x}(2-x)$.
- b) Signe : $e^{-x} > 0$ et $x > 0$, donc le signe de g est celui de $(2-x)$: $g'(x) > 0$ sur $]0; 2[$, $g'(x) < 0$ sur $]2; +\infty[$.
- c) Extremum : g admet un maximum sur $]0; +\infty[$ en $x = 2$ de valeur $g(2) = 2^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2}$.

Exercice 10 – Corrigé

- Une aire maximale**
- On note x la largeur (en m) de l'une des parties ($0 \leq x \leq 12$). L'autre partie a pour longueur $12-x$. L'aire de cette partie est $A(x) = x(12-x) = 12x - x^2$.
- a) $A'(x) = 12 - 2x$.
- b) $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 12 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 6$.
 A est croissante sur $]0; 6[$ et décroissante sur $]6; 12[$.
- c) Aire maximale : $A(6) = 6(12-6) = 36 \text{ m}^2$.
 L'aire est maximale pour $x = 6 \text{ m}$ (et vaut 36 m^2).

4 Étude complète d'une fonction

Exercice 11 – Corrigé

- $f(x) = x + \ln x$ sur $]0; +\infty[$.
- a) Limites : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ (car $\ln x \rightarrow -\infty$),
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (car $x \rightarrow +\infty$).
- b) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0$ sur $]0; +\infty[$.
- c) Variations : f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- d) Tangente en $x = 1$: $f(1) = 1 + \ln 1 = 1$ et $f'(1) = 2$.
 Équation : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) + 1 = 2x-1$.

- e) Allure de la courbe : courbe croissante, concave vers le bas pour $x < 1$.
 $(f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0)$ et concave vers le haut pour $x > 1$ ($f''(x) > 0$), passant par $(1; 1)$, avec asymptote verticale en $x = 0$ (la courbe descend vers $-\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$) et tendant vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.