

FORMULAIRE

Limites de fonctions et dérivation

1 Limites usuelles à l'infini

Fonction	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	Fonction	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
Constante k	k	k	$\sqrt{x}$	$+\infty$	non définie
x	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0	non définie
x^2	$+\infty$	$+\infty$	e^x	$+\infty$	0
x^3	$+\infty$	$-\infty$	$\ln x$	$+\infty$	non définie
$\frac{1}{x}$	0	0	$\sin x$	n'existe pas	n'existe pas
$\frac{1}{x^2}$	0	0	$\cos x$	n'existe pas	n'existe pas

2 Limites finies et infinies en un réel

Limite finie en a

On dit que f admet la limite L en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (L \in \mathbb{R}).$$

Limites infinies en un réel

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow f(x) > A$ au voisinage de a
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow f(x) < b$ au voisinage de a (A et b réels).

Asymptotes

- Asymptote horizontale :**
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Rightarrow y = L.$
- Asymptote verticale :**
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a.$

3 Opérations sur les limites

Somme, produit, quotient

Si $\lim_{x \rightarrow a} f = L$ et $\lim_{x \rightarrow a} g = L'$ (finies), alors

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g) = L + L'$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \times g) = L \times L'$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{L}{L'} \quad (\text{si } L' \neq 0)$$

Règles avec une limite infinie

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} g = L$ (finie) alors $\lim_{x \rightarrow a} (f + g) = +\infty.$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} g = L > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g) = +\infty.$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} g = L < 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g) = -\infty.$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} g = 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} f = L \neq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) = \pm\infty$ (selon le signe de g).

4 Formes indéterminées

Principales formes indéterminées

$$\begin{matrix} 0 & \infty & \infty - \infty \\ 0 & \infty & \infty - \infty \\ 0 \times \infty & 1^\infty & 0^0 & \infty^0 \end{matrix}$$

Méthodes pour lever une forme indéterminée

- Factoriser.
- Simplifier une fraction.
- Mettre au même dénominateur.
- Développer.
- Utiliser les identités remarquables.
- Transformer l'expression.
- Utiliser un développement limité (si vu).
- Encadrement, comparaison.
- Reconnaître un quotient de polynômes.

Règles utiles

- En $\pm\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré.
- En $\pm\infty$, un quotient de polynômes a la même limite que le quotient de leurs termes de plus haut degré.

5 Théorèmes d'encadrement et de comparaison

Théorème d'encadrement (des gendarmes)

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage de a et
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$
 alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$

Théorème de comparaison

- Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty.$
- Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty,$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty.$

FORMULAIRE

Limites de fonctions et dérivation

1 Dérivées des fonctions de référence

Fonction f	Dérivée f'	Fonction f	Dérivée f'
Constante k	0	$\sin x$	$\cos x$
x	1	$\cos x$	$-\sin x$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$n x^{n-1}$	e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$	$\ln x \quad (x > 0)$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$-\frac{n}{x^{n+1}} \quad (x \neq 0)$	$u^n \quad (u > 0, n \in \mathbb{Q})$	$n u^{n-1} u'$
$\sqrt{x} \quad (x > 0)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^u	$u' e^u$
		$\ln(u) \quad (u > 0)$	$\frac{u'}{u}$

2 Règles de dérivation

Somme et produit par un réel

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u' \quad (k \in \mathbb{R})$$

Produit

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Quotient ($v \neq 0$)

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Composée

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$$

3 Dérivées de fonctions composées usuelles

Puissance d'une fonction

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad (u \neq 0)$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (u > 0)$$

Exponentielle et logarithme

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u > 0)$$

Trigonométrie

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

4 Tableau des dérivées usuelles

Fonction f	Dérivée f'	Fonction f	Dérivée f'
k (constante)	0	$\sin x$	$\cos x$
x	1	$\cos x$	$-\sin x$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$n x^{n-1}$	e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x \quad (x > 0)$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	u^n	$n u^{n-1} u'$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	e^u	$u' e^u$
		$\ln u \quad (u > 0)$	$\frac{u'}{u}$

5 Rappels utiles

- Une fonction dérivable est continue.
- Les règles de dérivation s'appliquent sur tout intervalle où les fonctions sont dérivables.
- Toujours vérifier le domaine de définition (par exemple pour $\ln u$ ou $\sqrt{u}$).
- La dérivée d'une fonction composée se calcule avec $(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x)).$