

# Limites de fonctions et dérivation

## Exercice de synthèse n°1 – Corrigé

Étude complète d'une fonction rationnelle : limites, asymptotes et position de la courbe

Limites  
Asymptotes  
Variations  
Étude complète

### 0 Rappel

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$  par

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^2 - 4}$$

### 1 Domaine de définition

Le dénominateur s'annule pour  $x^2 - 4 = 0$ , soit  $(x - 2)(x + 2) = 0$ , donc  $x = -2$  ou  $x = 2$ .

$$\text{Ainsi } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}.$$

### 2 Limites en un réel

#### a) Limite en $-2^-$

Quand  $x \rightarrow -2^-$ ,  
 $x + 2 \rightarrow 0^-$  et  
 $x - 2 \rightarrow -4 < 0$  donc  
 $x^2 - 4 \rightarrow 0^+$  (en fait  $> 0$ ).  
Le numérateur  $\rightarrow 17 > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty.$$

#### b) Limite en $-2^+$

Quand  $x \rightarrow -2^+$ ,  
 $x + 2 \rightarrow 0^+$  et  
 $x - 2 \rightarrow -4 < 0$  donc  
 $x^2 - 4 \rightarrow 0^-$  (en fait  $< 0$ ).  
Le numérateur  $\rightarrow 17 > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty.$$

#### c) Limite en $2^-$

Quand  $x \rightarrow 2^-$ ,  
 $x - 2 \rightarrow 0^-$  et  
 $x + 2 \rightarrow 4 > 0$  donc  
 $x^2 - 4 \rightarrow 0^-$  ( $< 0$ ).  
Le numérateur  $\rightarrow 5 > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty.$$

#### d) Limite en $2^+$

Quand  $x \rightarrow 2^+$ ,  
 $x - 2 \rightarrow 0^+$  et  
 $x + 2 \rightarrow 4 > 0$  donc  
 $x^2 - 4 \rightarrow 0^+$  ( $> 0$ ).  
Le numérateur  $\rightarrow 5 > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$

### 3 Limites à l'infini

On effectue la division euclidienne :

$$\frac{2x^2 - 3x + 3}{x^2 - 4} = 2 + \frac{-3x + 11}{x^2 - 4}.$$

Or  $\frac{-3x + 11}{x^2 - 4} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$  (degré 1 au numérateur et 2 au dénominateur).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

### 4 Asymptotes

#### a) Asymptotes verticales

On a  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$   
donc  $x = -2$  est une asymptote verticale.

On a  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$   
donc  $x = 2$  est une asymptote verticale.

Les asymptotes verticales sont  $x = -2$  et  $x = 2$ .

#### b) Asymptote horizontale

Comme  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$ , la courbe de  $f$  admet l'asymptote horizontale d'équation  $y = 2$ .

### 6 Point d'intersection

On cherche  $f(x) = 2$  :

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^2 - 4} = 2 &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 3 = 2(x^2 - 4) \\ &\Leftrightarrow -3x + 3 = -8 \Leftrightarrow -3x = -11 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{11}{3}. \end{aligned}$$

La courbe  $C_f$  coupe l'asymptote horizontale en  $x = \frac{11}{3}$ , c'est-à-dire au point  $\left(\frac{11}{3}, 2\right)$ .

### 5 Position de la courbe par rapport à $y = 2$

On étudie le signe de  $f(x) - 2$  :

$$f(x) - 2 = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^2 - 4} - 2 = \frac{-3x + 11}{x^2 - 4}.$$

- Le numérateur s'annule en  $x = \frac{11}{3}$ . Il est positif si  $x < \frac{11}{3}$  et négatif si  $x > \frac{11}{3}$ .
- Le dénominateur est positif si  $|x| > 2$  et négatif si  $-2 < x < 2$ .

On en déduit le signe de  $f(x) - 2$  :

| $x$        | $-\infty$ | $-2$ | $2$ | $\frac{11}{3}$ | $+\infty$ |
|------------|-----------|------|-----|----------------|-----------|
| $f(x) - 2$ | +         | -    | +   | 0              | -         |

Ainsi,  $C_f$  est au-dessus de  $y = 2$  sur  $]-\infty, -2[ \cup ]2, \frac{11}{3}[$   
et au-dessous sur  $]-2, 2[ \cup ]\frac{11}{3}, +\infty[$ .

### 7 Représentation graphique

À l'aide des résultats précédents, on trace l'allure de la courbe  $C_f$  :

- deux asymptotes verticales :  $x = -2$  et  $x = 2$ ,
- une asymptote horizontale :  $y = 2$ ,
- la courbe est au-dessus de  $y = 2$  sur  $]-\infty, -2[ \cup ]2, \frac{11}{3}[$  et au-dessous ailleurs,
- la courbe coupe  $y = 2$  au point  $\left(\frac{11}{3}, 2\right)$ .

