

## SUITES ET RÉCURRENCE

Calculer et manipuler les termes d'une suite



## OBJECTIFS DE LA FICHE

- ✓ Calculer des termes d'une suite explicite.
- ✓ Calculer des termes d'une suite définie par récurrence.
- ✓ Utiliser la calculatrice pour générer une suite.
- ✓ Modéliser une situation par une suite.



## RAPPELS

- **Suite explicite** : le terme général  $u_n$  est donné par une formule en fonction de  $n$ .
- **Suite définie par récurrence** : on connaît  $u_0$  (ou  $u_1$ ) et une relation qui permet de calculer  $u_{n+1}$  à partir de  $u_n$ .
- L'indice  $n$  commence en général à 0.

## 1 SUITES EXPLICITES

Pour chacune des suites suivantes, calculer  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_5$  et  $u_{10}$ .

a)  $u_n = 2n^2 - n + 1$

$u_0 = 1$        $u_1 = 2$        $u_5 = 46$        $u_{10} = 191$

b)  $u_n = (-1)^n (3n - 2)$

$u_0 = -2$        $u_1 = 1$        $u_5 = -13$        $u_{10} = 28$

c)  $u_n = \frac{n+1}{n+2}$  (pour  $n \geq 0$ )

$u_0 = \frac{1}{2}$        $u_1 = \frac{2}{3}$        $u_5 = \frac{6}{7}$        $u_{10} = \frac{11}{12}$

## 2 SUITES DÉFINIES PAR RÉCURRENCE

Dans chaque cas, on donne  $u_0$  et une relation de récurrence.

Calculer successivement  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ .

a)  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 2u_n - 1$

$u_1 = 1$        $u_2 = 1$        $u_3 = 1$        $u_4 = 1$

b)  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = 0,6u_n + 4$

$u_1 = 7$        $u_2 = 8,2$        $u_3 = 8,92$        $u_4 = 9,352$

c)  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2}$

$u_1 = \frac{3}{5} = 0,6$        $u_2 = \frac{0,6}{2,6} = \frac{3}{13} \approx 0,2308$

$u_3 = \frac{3/13}{29/13} = \frac{3}{29} \approx 0,1034$        $u_4 = \frac{3/29}{61/29} = \frac{3}{61} \approx 0,0492$

## 3 À LA CALCULATRICE

On considère la suite définie par :  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 0,7u_n + 3$ .

1. Entrer cette suite en mode "SUITE" de la calculatrice.
2. Afficher une table de valeurs de  $u_n$  pour  $n$  allant de 0 à 20 avec un pas de 1.
3. Lire (ou déterminer)  $u_{10}$ ,  $u_{15}$  et  $u_{20}$ .

On obtient :  $u_{10} \approx 9,9741$

$u_{15} \approx 9,9990$        $u_{20} \approx 10,0000$

4. À partir de quel rang semble-t-on avoir  $u_n$  proche de 10 ? Justifier votre réponse.

À partir du rang 10, les termes sont très proches de 10 et la suite semble converger vers 10.



## 4 COMPRENDRE UNE RÉCURRENCE

Indiquer pour chaque proposition si la suite est :

- explicite ou • définie par récurrence.

Justifier.

a)  $u_n = 5n - 7$

Type : **explicite**      Justification : le terme général  $u_n$  est donné directement en fonction de  $n$ .

b)  $u_0 = 4$  et  $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$

Type : **définie par récurrence**      Justification : on connaît  $u_0$  et une relation qui permet d'obtenir  $u_{n+1}$  à partir de  $u_n$ .

c)  $u_1 = 3$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n = 2u_{n-1} - 1$

Type : **définie par récurrence**      Justification : on connaît  $u_1$  et une relation entre  $u_n$  et  $u_{n-1}$ .

d)  $u_n = \frac{1}{n+1}$  (pour  $n \geq 0$ )

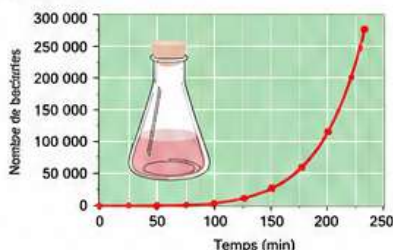
Type : **explicite**      Justification : le terme général est donné par une formule en fonction de  $n$ .

## 5 MODÉLISER UNE SITUATION

Une population de bactéries double toutes les 20 minutes.

Au départ ( $t = 0$  min), on compte 500 bactéries.

| Time (min)  | Number of Cells               |
|-------------|-------------------------------|
| 0           | 500 = $2^0 \times 500$        |
| 20          | 1 000 = $2^1 \times 500$      |
| 40          | 2 000 = $2^2 \times 500$      |
| 60          | 4 000 = $2^3 \times 500$      |
| 80          | 8 000 = $2^4 \times 500$      |
| 100         | 16 000 = $2^5 \times 500$     |
| 120 (= 2 h) | 32 000 = $2^6 \times 500$     |
| 180 (= 3 h) | 128 000 = $2^8 \times 500$    |
| 240 (= 4 h) | 256 000 = $2^{10} \times 500$ |



1. Tableau complété ci-dessus pour  $t = 40$  min, 60 min et 80 min.
2. Après  $n$  périodes de 20 minutes :  $u_n = 500 \times 2^n$ .  
Valeur au bout de  $t$  minutes ( $t = 20n$ ) :  $u_n = 500 \times 2^{\frac{t}{20}}$ .
3.  $u_{n+1} = 2u_n$  car la population double à chaque période.
4. Après 3 heures ( $t = 180$  min = 9 périodes) :  $u_9 = 500 \times 2^9 = 128\,000$  bactéries.
5. On cherche  $500 \times 2^{\frac{t}{20}} > 50\,000 \Leftrightarrow 2^{\frac{t}{20}} > 100 \Leftrightarrow \frac{t}{20} > \log_2(100) \approx 6,64$  donc  $t > 132,8$  min. Il faut environ 133 minutes (2 h 13 min).

## 6 PETIT DÉFI : COMPARER DEUX SUITES

On considère les suites suivantes :

$u_n = 1,2^n$  et  $v_n = 0,5n + 5$  (pour  $n \geq 0$ )

1. Calculer  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $u_4$  et  $v_0$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_4$ .

| $n$   | 0 | 1   | 2    | 3     | 4      |
|-------|---|-----|------|-------|--------|
| $u_n$ | 1 | 1,2 | 1,44 | 1,728 | 2,0736 |
| $v_n$ | 5 | 5,5 | 6    | 6,5   | 7      |



2. À partir de quel rang a-t-on  $u_n > v_n$  ?

Conjecturer à partir du tableau.

D'après le tableau, à partir de  $n = 6$ , on a  $u_n > v_n$ .

3. Conjecturer le comportement de  $u_n - v_n$  quand  $n$  grandit.

La suite  $u_n - v_n$  semble d'abord négative, puis elle devient positive et augmente :  $u_n - v_n \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .



**BILAN DE LA FICHE** : Savoir calculer des termes de suites explicites et récurrentes, utiliser la calculatrice, modéliser une situation et comparer des suites sur quelques premiers rangs.

Auto-évaluation :

😊 Compris    😐 En cours    😞 À revoir