

OBJECTIFS DE LA FICHE

- ✓ Comprendre le principe d'un raisonnement par récurrence.
- ✓ Rédiger une démonstration complète.
- ✓ Montrer qu'une suite vérifie une propriété pour tout entier n .



RAPPEL : PRINCIPE DE RÉCURRENCE

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

- 1 Initialisation : on montre que $P(n_0)$ est vraie.
- 2 Hérédité : on montre que, pour tout $n \geq n_0$, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
- 3 Conclusion : on conclut que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

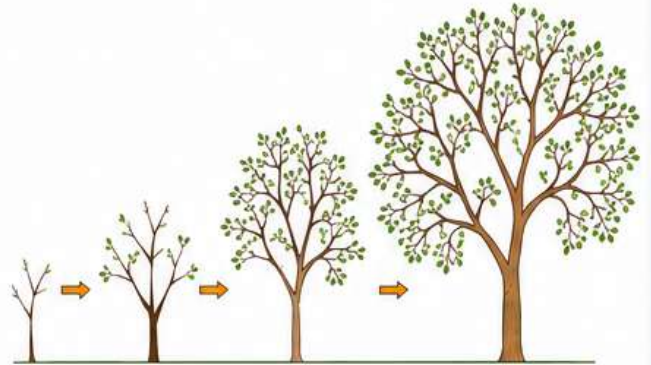
MÉTHODE EN 3 ÉTAPES

- 1 Initialisation
- 2 Hérédité
- 3 Conclusion

1 COMPRENDRE LE PRINCIPE

Pour chacune des situations suivantes, associer à chaque étape (initialisation, hérédité, conclusion) la phrase correspondante.

- a) ☐ Initialisation
☒ Hérédité
☒ Conclusion
- On suppose que la propriété est vraie au rang n .
 - On montre qu'elle est vraie au rang 0.
 - On en déduit qu'elle est vraie pour tout $n \geq 0$.
- b) ☐ Initialisation
☐ Hérédité
☒ Conclusion
- On vérifie que la propriété est vraie au rang 1.
 - On conclut qu'elle est vraie pour tout $n \geq 1$.
 - On montre que, si elle est vraie au rang n alors elle l'est aussi au rang $n+1$.
- c) ☐ Initialisation
☒ Hérédité
☐ Conclusion
- On établit que $P(n+1)$ est vraie.
 - On conclut : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.
 - On vérifie que $P(2)$ est vraie.



5 ENCADREMENT PAR RÉCURRENCE

On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,6u_n + 2$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 5$.

1. Initialisation :

$$u_0 = 1 \leq 5 \quad \text{La propriété est vraie au rang 0.}$$

2. Hérédité :

Supposons que $u_n \leq 5$.

$$\text{Alors } u_{n+1} = 0,6u_n + 2 \leq 0,6 \times 5 + 2 = 5.$$

Donc, si $u_n \leq 5$ alors $u_{n+1} \leq 5$.

3. Conclusion :

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 5$.

3. En déduire un encadrement de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Réponse : $u_n \leq 5$ et comme $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,6u_n + 2 \geq 2$, on a $1 \leq u_n \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2,5$.

1. Initialisation :

$$u_0 = 1 \quad \text{X donc on commence au rang 1.}$$

$$u_1 = 0,6u_0 + 2 = 2,6 \geq 2,5 \quad \text{La propriété est vraie au rang 1.}$$

2. Hérédité :

Supposons que $u_n \geq 2,5$ avec $n \geq 1$.

$$\text{Alors } u_{n+1} = 0,6u_n + 2 \geq 0,6 \times 2,5 + 2 = 3,5 \geq 2,5.$$

Donc, si $u_n \geq 2,5$ alors $u_{n+1} \geq 2,5$.

3. Conclusion :

Par récurrence, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 2,5$.

3 MONTRER PAR RÉCURRENCE QUE $u_n \leq u_{n+1}$

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

1. Initialisation :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_1 = 2u_0 + 1 = 5.$$

$$\text{Donc } u_0 = 2 \leq 5 = u_1. \quad \text{La propriété est vraie au rang 0.}$$

2. Hérédité :

Supposons que $u_n \leq u_{n+1}$.

$$\text{Alors } u_{n+2} = 2u_{n+1} + 1.$$

$$\text{On calcule la différence : } u_{n+2} - u_{n+1} = (2u_{n+1} + 1) - u_{n+1} = u_{n+1} + 1.$$

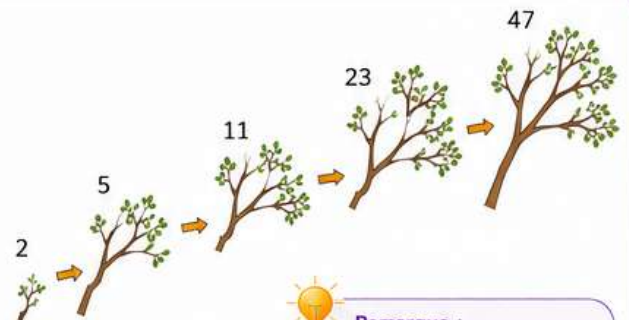
Or par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} \geq u_n$ et comme $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$, on en déduit par récurrence que $u_{n+1} \geq 2$ pour tout n .

$$\text{Ainsi } u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} + 1 \geq 2 + 1 = 3 > 0 \text{ donc } u_{n+2} > u_{n+1}.$$

Donc, si $u_n \leq u_{n+1}$ alors $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

3. Conclusion :

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.



Remarque :

Si $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n , on dit que la suite (u_n) est croissante (ou croissante).



BILAN DE LA FICHE :

Je sais comprendre et utiliser le raisonnement par récurrence.



Je sais rédiger une démonstration complète.



Je dois encore m'entraîner.

