



SUITES ET RÉCURRENCE

CORRIGÉ

FICHE D'EXERCICES #4



Une suite peut paraître compliquée, mais sa limite révèle souvent une grande simplicité.

1 LIMITES DES SUITES USUELLES

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes.

1 $u_n = n$ On a $n \rightarrow +\infty$.
Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2 $u_n = -3n + 5$ On a $-3n + 5 \rightarrow -\infty$.
Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

3 $u_n = 2n^2 - 7n + 1$ Le terme de plus haut degré est $2n^2$ (coefficient positif).
Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4 $u_n = \sqrt{n}$ On a $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$.
Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

5 $u_n = \frac{1}{n}$ On a $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.
Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

6 $u_n = \frac{3}{n+1}$ On a $\frac{3}{n+1} \rightarrow 0$.
Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

7 $u_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 - n + 1}$ On divise par n^2 :
$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 1.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

8 $u_n = \frac{2n+1}{3n-2}$ On divise par n :
$$u_n = \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{2}{n}} \rightarrow \frac{2}{3}.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

"Les limites sont comme l'horizon : on ne les atteint pas vraiment, mais elles nous guident."

1 LIMITES DES SUITES USUELLES (suite)

9 $u_n = (-1)^n$ La suite n'admet pas de limite car elle alterne entre 1 et -1.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ n'existe pas.

10 $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ Suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, avec $0 < q < 1$.
Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

11 $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ Suite géométrique de raison $q = \frac{3}{2} > 1$.
Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

12 $u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$n^2 \leq n^2 + 1 \leq (n+1)^2.$$

En prenant la racine carrée (fonctions croissantes sur $\mathbb{R}_+$),
$$n \leq \sqrt{n^2 + 1} \leq n+1.$$

En divisant par $n > 0$, on obtient :
$$1 \leq u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Or $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$. Par le théorème des gendarmes,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

13 $u_n = \frac{5n-1}{n^2+n}$ On divise par n^2 :
$$u_n = \frac{\frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 0.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

14 $u_n = \frac{n^3+2}{2n^3-n+7}$ On divise par n^3 :
$$u_n = \frac{1 + \frac{2}{n^3}}{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{7}{n^3}} \rightarrow \frac{1}{2},$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

15 $u_n = 7 - \frac{4}{n}$ On a $\frac{4}{n} \rightarrow 0$. Donc $u_n \rightarrow 7$.
Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$.

★ À RETENIR

- ✓ Une suite géométrique de raison $0 < q < 1$ converge vers 0.
- ✓ Une suite géométrique de raison $q > 1$ diverge vers $+\infty$.
- ✓ On peut souvent déterminer une limite en factorisant, en divisant par n^k ou en encadrant la suite.

Des étapes vers la limite !



Comprendre
les suites,
c'est déjà faire
un pas vers
l'infini...

2 COMPORTEMENT ET LIMITE DE q^n

A. Pour chaque valeur de q , déterminer la limite de la suite $u_n = q^n$ et décrire son comportement.

1 $q = 2$

Comme $q = 2 > 1$, la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty.$$

2 $q = \frac{3}{2}$

Comme $q = \frac{3}{2} > 1$, la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty.$$

3 $q = \frac{1}{2}$

Comme $0 < q = \frac{1}{2} < 1$, la suite (q^n) converge vers 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

4 $q = -\frac{1}{3}$

Comme $|q| = \frac{1}{3} < 1$, la suite (q^n) converge vers 0 (en alternant de signe).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

5 $q = -2$

Comme $|q| = 2 > 1$, la suite (q^n) n'admet pas de limite (elle diverge en valeur absolue et alterne de signe).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n \text{ n'existe pas.}$$

6 $q = -1$

On a $q^n = (-1)^n$, la suite alterne entre 1 et -1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n \text{ n'existe pas.}$$

7 $q = 1$

La suite est constante : $q^n = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1.$$

8 $q = 0$

Pour tout $n \geq 1$, $q^n = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

9 $q = \sqrt{2}$

Comme $q = \sqrt{2} > 1$, la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty.$$

10 $q = 0,8$

Comme $0 < q = 0,8 < 1$, la suite (q^n) converge vers 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

B. On considère $u_n = q^n$. Pour quelles valeurs de q a-t-on :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$?

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ si et seulement si $|q| < 1$, c'est-à-dire si $-1 < q < 1$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$?

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ si et seulement si $q > 1$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$?

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$ si et seulement si $q = 1$.

d) u_n n'a pas de limite ? Cela se produit si $q \leq -1$.

★ À RETENIR

- Si $|q| < 1$ alors $q^n \rightarrow 0$.
- Si $q = 1$ alors $q^n \rightarrow 1$.
- Si $q > 1$ alors $q^n \rightarrow +\infty$.
- Si $q \leq -1$ alors (q^n) n'a pas de limite.

3 CALCULER UNE LIMITE À L'AIDE DES OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Calculer la limite de chacune des suites suivantes.

1 $u_n = n + \frac{1}{n}$

On a $n \rightarrow +\infty$ et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

2 $u_n = 3n^2 + 2n - 1$

Le terme de plus haut degré est $3n^2$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

3 $u_n = -5n + \sqrt{n}$

On a $-5n \rightarrow -\infty$ et $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$, mais n domine $\sqrt{n}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

4 $u_n = n^2 + \frac{1}{n^2}$

On a $n^2 \rightarrow +\infty$ et $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

5 $u_n = (2n+1) + \frac{3}{n}$

On a $2n+1 \rightarrow +\infty$ et $\frac{3}{n} \rightarrow 0$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

6 $u_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}$

On a $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ et $\frac{2}{n^2} \rightarrow 0$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

7 $u_n = \frac{n^2 + 3n}{n^2 - n}$

On divise par n^2 :

$$u_n = \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \rightarrow 1.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

8 $u_n = \frac{2n+1}{n} + \frac{3}{n^2}$

On a $\frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} \rightarrow 2$ et $\frac{3}{n^2} \rightarrow 0$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

9 $u_n = \frac{n^2 - 4}{n^2 + 1}$

On divise par n^2 :

$$u_n = \frac{1 - \frac{4}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 1.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

10 $u_n = \frac{5n^3 - n + 2}{2n^3 + 7}$

On divise par n^3 :

$$u_n = \frac{5 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{2 + \frac{7}{n^3}} \rightarrow \frac{5}{2}.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{5}{2}.$$

11 $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$

On écrit

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}.$$

Le dénominateur $\rightarrow +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

12 $u_n = (n+1) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

On écrit

$$u_n = 1 - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

13 $u_n = \frac{(2n+1)(n-3)}{n^2 - 5n + 6}$

On divise par n^2 :

$$u_n = \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right)}{1 - \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}} \rightarrow 2.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

14 $u_n = \frac{2n^2 + 3n - 5}{n^2 + 4n + 1}$

On divise par n^2 :

$$u_n = \frac{2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 2.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

15 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \sim n^{-\frac{1}{2}} \rightarrow 0.$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

16 $u_n = \frac{n^2 + 1}{n + \sqrt{n}}$

On divise par n :

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} \rightarrow +\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

"Les grandes idées naissent souvent d'exercices apparemment simples."

Encore un pas
vers la Première
spécialité !