

- Théorème des gendarmes
- Théorèmes de minoration et de majoration
- Suite croissante et majorée $\Rightarrow$ convergence

1 Théorème des gendarmes

1 $u_n = \frac{\sin n}{n}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin n \leq 1$ donc $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2 $v_n = \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos n \leq 1$ donc $1 \leq 2 + \cos n \leq 3$.

Ainsi $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{3}{\sqrt{n}}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 0$.

Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

3 $2 - \frac{3}{n} \leq w_n \leq 2 + \frac{5}{n} \quad (n \geq 1)$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{n}\right) = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{5}{n}\right) = 2$.

Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2$.

4 $u_n = \frac{n + \sin n}{n + 1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin n \leq 1$ donc $n - 1 \leq n + \sin n \leq n + 1$.

Ainsi $\frac{n - 1}{n + 1} \leq u_n \leq \frac{n + 1}{n + 1} = 1$.

Or $\frac{n - 1}{n + 1} = 1 - \frac{2}{n + 1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n + 1}\right) = 1$.

Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Encadrer
pour mieux
conclure ...

2 Théorèmes de minoration et de majoration

1 On sait que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq n^2 - 3n$.

Comme $n^2 - 3n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ (par exemple $n^2 - 3n \geq \frac{1}{2}n^2$ pour n assez grand),

par le théorème de minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2 $v_n = -n^2 + 4 \sin n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin n \leq 1$ donc $-n^2 - 4 \leq v_n \leq -n^2 + 4$.

Or $-n^2 - 4 \rightarrow -\infty$ et $-n^2 + 4 \rightarrow -\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$,

par le théorème de majoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

3 $w_n = n + \cos n$

Comme $\cos n \geq -1$, on a $w_n \geq n - 1$.

Or $n - 1 \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$,

par le théorème de minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$.

4 $t_n = -2n + \sin(n)$

Comme $\sin n \leq 1$, on a $t_n \leq -2n + 1$.

Or $-2n + 1 \rightarrow -\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$,

par le théorème de majoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$.

$+\infty$

$-\infty$

Des
inégalités
pour aller
plus loin ...

3 Suite croissante et majorée

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}$.

1 Calcul des premiers termes :

$u_1 = \frac{1 + 3}{2} = 2$; $u_2 = \frac{2 + 3}{2} = \frac{5}{2}$; $u_3 = \frac{\frac{5}{2} + 3}{2} = \frac{11}{4}$.

2 Conjecture : Les termes semblent croissants et se rapprocher de 3.

On conjecture que (u_n) est croissante et majorée par 3.

3 Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3$.

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, $u_0 = 1 \leq 3$.
Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• **Hérédité** : Supposons la propriété vraie au rang n , n entier naturel fixé.
Montrons que la propriété est vraie au rang $n + 1$:

Si $u_n \leq 3$, alors $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2} \leq \frac{3 + 3}{2} = 3$.

Donc la propriété est héréditaire.

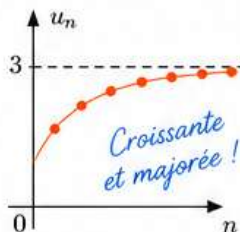
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n , donc $u_n \leq 3$.

4 Montrons que $u_{n+1} - u_n = \frac{3 - u_n}{2}$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 3}{2} - u_n = \frac{3 - u_n}{2}$.

5 Comme $u_n \leq 3$, on a $3 - u_n \geq 0$, donc l'insi, (u_n) est croissante.

6 La suite (u_n) est croissante et majorée par 3, donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.



4 Synthèse

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \sqrt{2v_n + 3}$.

1 Calcul des premiers termes :

$v_1 = \sqrt{2 \times 2 + 3} = \sqrt{7} \approx 2,65$;

$v_2 = \sqrt{2\sqrt{7} + 3} \approx 2,70$; $v_3 = \sqrt{2v_2 + 3} \approx 2,90$.

2 Conjecture : Les termes semblent croissants et se rapprocher de 3.

3 Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n < 3$.

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, $v_0 = 2 < 3$.

Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• **Hérédité** : Supposons la propriété vraie au rang n , n entier naturel fixé.
Montrons que la propriété est vraie au rang $n + 1$:

Si $v_n < 3$, alors $2v_n + 3 < 2 \times 3 + 3 = 9$, donc

$v_{n+1} = \sqrt{2v_n + 3} < \sqrt{9} = 3$.

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n , donc $v_n < 3$.

4 Montrons que $v_{n+1} - v_n = \frac{-(v_n - 3)(v_n + 1)}{\sqrt{2v_n + 3} + v_n}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sqrt{2v_n + 3} - v_n = \frac{(2v_n + 3) - v_n^2}{\sqrt{2v_n + 3} + v_n} \\ &= \frac{-(v_n - 3)(v_n + 1)}{\sqrt{2v_n + 3} + v_n} \end{aligned}$$

5 Comme $0 \leq v_n < 3$, on a $v_n - 3 < 0$, $v_n + 1 > 0$ et $\sqrt{2v_n + 3} + v_n > 0$. Donc $v_{n+1} - v_n > 0$ et la suite (v_n) est croissante.

6 La suite (v_n) est croissante et majorée par 3, donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.



Itérer,
encadrer,
converger ...