

Corrigé Méthode 2

Une rédaction détaillée et complète

La rigueur en maths te fait progresser !



1 Rappel de l'énoncé

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 1 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{4v_n + 3}{v_n + 2}.$$

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{4x + 3}{x + 2}$.

On suppose que g est strictement croissante sur $[0 ; 3]$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 3.$$

2 Initialisation

Au rang initial $n = 0$, on a $v_0 = 1$.

$$\text{Calculons } v_1 : v_1 = \frac{4v_0 + 3}{v_0 + 2} = \frac{4 \times 1 + 3}{1 + 2} = \frac{7}{3}.$$

$$\text{Or } 0 \leq 1 \leq \frac{7}{3} \leq 3 \quad (\text{car } \frac{7}{3} \approx 2,33 \leq 3).$$

$$\text{Donc } 0 \leq v_0 \leq v_1 \leq 3.$$

La propriété est vraie au rang initial $n = 0$.

✓ On vérifie explicitement la propriété au premier rang.

3 Hérédité

Soit n un entier naturel fixé. On suppose que la propriété est vraie au rang n :

$$0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 3.$$

La fonction g est strictement croissante sur $[0 ; 3]$, donc elle conserve l'ordre. En appliquant g aux quatre membres de l'inégalité, on obtient :

$$g(0) \leq g(v_n) \leq g(v_{n+1}) \leq g(3).$$

Calculons chacune de ces images :

$$\bullet g(0) = \frac{4 \times 0 + 3}{0 + 2} = \frac{3}{2}$$

$$\bullet g(v_{n+1}) = \frac{4v_{n+1} + 3}{v_{n+1} + 2} = v_{n+2},$$

$$\bullet g(v_n) = \frac{4v_n + 3}{v_n + 2} = v_{n+1},$$

$$\bullet g(3) = \frac{4 \times 3 + 3}{3 + 2} = \frac{15}{5} = 3.$$

$$\text{Ainsi, } \frac{3}{2} \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 3.$$

$$\text{Comme } \frac{3}{2} \geq 0, \text{ on en déduit : } 0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 3.$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

⚙ L'idée clé : la croissance de g permet de conserver les inégalités !

4 Conclusion

La propriété est vraie au rang initial $n = 0$ et elle est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n .

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 3.$$

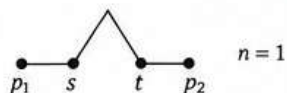
🏁 C'est terminé ! La propriété est vraie pour tous les entiers naturels.

Une méthode bien maîtrisée te servira dans de nombreux exercices !

Des suites ... qui construisent de grandes idées !



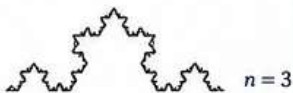
$n = 0$



$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$

Une suite, étape après étape, vers plus de complexité !

SUITES

MÉTHODES

RÉUSSIR LE BAC

Même une longue démonstration commence toujours par une première étape !

Raisonner aujourd'hui, réussir demain !