

Exercice 1 Polynôme

$$u_n = 4n^3 - 7n^2 + 2n - 5$$

Correction détaillée

- On repère le terme dominant : ici $4n^3$.
- On factorise par n^3 :

$$u_n = n^3 \left(4 - \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{5}{n^3} \right).$$
- Quand $n \rightarrow +\infty$, on a :
 $\frac{7}{n} \rightarrow 0, \frac{2}{n^2} \rightarrow 0, \frac{5}{n^3} \rightarrow 0.$
- Donc la parenthèse tend vers 4 et $n^3 \rightarrow +\infty$.

Conclusion :

$$u_n \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$



Exercice 2 Quotient de polynômes

$$v_n = \frac{5n^2 - 3n + 2}{2n^2 + n - 4}$$

Correction détaillée

- On repère les degrés : le numérateur et le dénominateur sont de degré 2.
- On divise par n^2 :

$$v_n = \frac{5 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2}}.$$
- Quand $n \rightarrow +\infty$, on a :
 $-\frac{3}{n} \rightarrow 0, \frac{2}{n^2} \rightarrow 0, \frac{1}{n} \rightarrow 0, \frac{4}{n^2} \rightarrow 0.$
- Donc le numérateur tend vers 5 et le dénominateur tend vers 2.

Conclusion :

$$v_n \rightarrow \frac{5}{2} \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$



Exercice 3 Puissance (a^n)

$$w_n = \frac{4 + 2^n}{1 + 6^n}$$

Correction détaillée

- On repère les puissances : au numérateur 2^n , au dénominateur 6^n .
- On factorise par 6^n :

$$w_n = \frac{\frac{4}{6^n} + \left(\frac{2}{6}\right)^n}{\frac{1}{6^n} + 1} = \frac{\frac{4}{6^n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{1}{6^n} + 1}.$$
- Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $\frac{4}{6^n} \rightarrow 0$, $\left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0$ et $\frac{1}{6^n} \rightarrow 0$.
- Le numérateur tend vers 0 et le dénominateur tend vers 1.

Conclusion :

$$w_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$



Exercice 4 Théorème des gendarmes

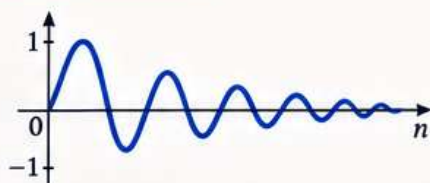
$$a_n = \frac{\cos n}{n}$$

Correction détaillée

- On sait que $-1 \leq \cos n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Donc $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$.
- Or $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ et $-\frac{1}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\frac{\cos n}{n} \rightarrow 0$.

Conclusion :

$$a_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$



Exercice 5 Quantité conjuguée

$$b_n = \sqrt{n^2 + 4n} - n$$

Correction détaillée

- On utilise la quantité conjuguée :

$$b_n = (\sqrt{n^2 + 4n} - n) \times \frac{\sqrt{n^2 + 4n} + n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n}$$

$$= \frac{n^2 + 4n - n^2}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} = \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n}.$$
- On factorise par n au dénominateur :

$$b_n = \frac{4n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1 \right)} = \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}.$$
- Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $\frac{4}{n} \rightarrow 0$, donc $\sqrt{1 + \frac{4}{n}} \rightarrow 1$.
- Ainsi, $b_n \rightarrow \frac{4}{1 + 1} = 2$.

Conclusion :

$$b_n \rightarrow 2 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

$$(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$$

Exercice 6 Composition (fonction continue)

$$c_n = \sqrt{\frac{5n^2 + 2}{2n^2 + 3}}$$

Correction détaillée

- On étudie d'abord la limite du quotient à l'intérieur de la racine :

$$\frac{5n^2 + 2}{2n^2 + 3} = \frac{5 + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{3}{n^2}} \rightarrow \frac{5}{2}.$$
- La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$, donc on peut passer à la limite :

$$c_n = \sqrt{\frac{5n^2 + 2}{2n^2 + 3}} \rightarrow \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Conclusion :

$$c_n \rightarrow \sqrt{\frac{5}{2}} \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$



Une limite dans une racine !



Même raisonnement, plus d'autonomie !

Repérer. Choisir. Conclure.