

CORRIGÉ — EXERCICE DE SYNTHÈSE 1

Variable aléatoire : problème complet

Loi de probabilité • Espérance • Variance • Écart-type • Jeu équitable



Corrigé détaillé : on construit la loi, puis on calcule les paramètres et on interprète les résultats.

1 Un jeu de dés

A Partie A — Étude du gain brut

- Somme 7 : 6 couples, donc $P(X = 10) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
- Somme 6 ou 8 : $5 + 5 = 10$ couples, donc $P(X = 4) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.
- Autres cas : 20 couples, donc $P(X = -2) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

x_i	-2	4	10
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{6}$

$$4. P(X > 0) = P(X = 4) + P(X = 10) = \frac{5}{18} + \frac{1}{6} = \frac{4}{9} \approx 0,444.$$

$$5. E(X) = (-2) \times \frac{5}{9} + 4 \times \frac{5}{18} + 10 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3} \approx 1,67 \text{ €}.$$

Sur un grand nombre de parties, le gain brut moyen est d'environ 1,67 € par partie.

$$6. E(X^2) = 4 \times \frac{5}{9} + 16 \times \frac{5}{18} + 100 \times \frac{1}{6} = \frac{70}{3}.$$

$$V(X) = \frac{70}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{185}{9} \approx 20,56.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{185}{9}} = \frac{\sqrt{185}}{3} \approx 4,53.$$

B Partie B — Prix de participation

$$7. G = X - a, \text{ donc } E(G) = E(X) - a = \frac{5}{3} - a.$$

$$8. \text{Jeu équitable : } E(G) = 0, \text{ donc } a = \frac{5}{3} \approx 1,67 \text{ €}.$$

$$9. \text{Pour } a = 2 : E(G) = \frac{5}{3} - 2 = -\frac{1}{3} \approx -0,33 \text{ €}.$$

Le jeu devient favorable à l'organisateur.

$$10. \text{Pour } a = 2, \text{ le gain est strictement positif lorsque } X = 4 \text{ ou } X = 10.$$

$$P(G > 0) = \frac{5}{18} + \frac{1}{6} = \frac{4}{9} \approx 0,444.$$



À retenir : $E(X - a) = E(X) - a$ et $V(X - a) = V(X)$.