

EXERCICE DE SYNTHÈSE 1

Variable aléatoire : problème complet

Loi de probabilité • Espérance • Variance • Écart-type • Jeu équitable



Objectif : mobiliser dans un même problème les principales notions sur les variables aléatoires discrètes et interpréter les paramètres obtenus.

1 Un jeu de dés

On lance deux dés équilibrés à six faces, numérotées de 1 à 6. Les 36 couples de résultats sont équiprobables.

Le gain brut X , en euros, est défini de la façon suivante :

- si la somme des deux dés vaut 7, le joueur gagne 10 € ;
- si la somme vaut 6 ou 8, le joueur gagne 4 € ;
- dans tous les autres cas, il perd 2 €.

A Partie A — Étude du gain brut

1. Déterminer le nombre de couples donnant une somme égale à 7.
2. Déterminer le nombre de couples donnant une somme égale à 6 ou 8.
3. En déduire la loi de probabilité de X .
4. Calculer $P(X > 0)$.
5. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat.
6. Calculer $V(X)$, puis l'écart-type $\sigma(X)$. Arrondir $\sigma(X)$ au centième.

B Partie B — Prix de participation

L'organisateur décide maintenant de faire payer un prix d'entrée de a euros. Le gain algébrique réel du joueur devient :

$$G = X - a$$

7. Exprimer $E(G)$ en fonction de a .
8. Déterminer le prix a pour lequel le jeu est équitable.
9. L'organisateur choisit finalement $a = 2$ €. Calculer $E(G)$ et interpréter son signe.
10. Pour $a = 2$ €, calculer la probabilité que le joueur réalise un gain strictement positif.



Rappel utile : pour une variable aléatoire discrète, $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.