

CORRIGÉ – EXERCICE DE SYNTHÈSE 2

Modélisation binomiale : problème complet

Schéma de Bernoulli • Loi binomiale • Probabilités cumulées • Espérance



Corrigé détaillé : on modélise la situation, on calcule les probabilités puis on interprète les résultats.

2 Une loterie promotionnelle

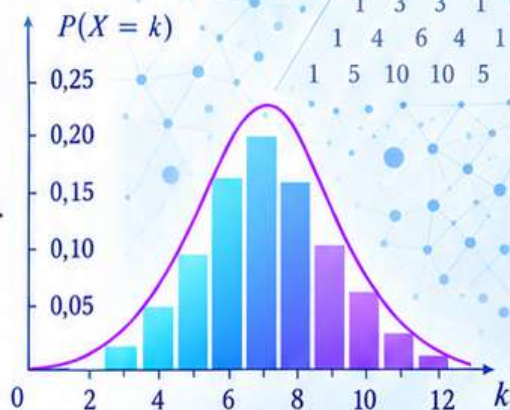
Dans un jeu promotionnel, chaque ticket acheté a une probabilité de 0,18 d'être gagnant. On suppose que les résultats des tickets sont indépendants. Un client achète 12 tickets. On note X le nombre de tickets gagnants.

A Partie A — Modéliser et calculer

- Chaque ticket correspond à une épreuve de Bernoulli de succès "le ticket est gagnant", de probabilité $p = 0,18$. Les tirages sont indépendants et il y a 12 tickets. Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(12; 0,18)$.
- $P(X = 0) = 0,82^{12} \approx 0,092$.
- $P(X = 2) = \binom{12}{2} \times 0,18^2 \times 0,82^{10} \approx 0,294$.
- $P(X \leq 3) \approx 0,845$.
- $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,82^{12} \approx 0,908$.
- $E(X) = np = 12 \times 0,18 = 2,16$. En moyenne, le client obtient environ 2,16 tickets gagnants.

B Partie B — Interpréter et décider

- $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 1 - 0,845 = 0,155$.
- Le vendeur affirme : « Dans plus de 90 % des cas, le client obtient au moins un ticket gagnant. » Or $P(X \geq 1) \approx 0,908$. Comme $0,908 > 0,90$, l'affirmation est vraie.
- On cherche le plus petit entier n tel que $1 - 0,82^n > 0,95$, soit $0,82^n < 0,05$. On obtient $n > \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,82)} \approx 15,10$. Donc il faut acheter 16 tickets.
Vérification : pour 15 tickets, la probabilité vaut $\approx 0,949$; pour 16 tickets, elle vaut $\approx 0,958$.
- Le nombre moyen de tickets gagnants vaut $E(X) = 2,16$. Comme $2,16 < 4$, il n'est pas supérieur au seuil de 4 tickets.



À retenir : pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ et $E(X) = np$.