



Variable aléatoire et loi de probabilité



1 Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?

Définition

Une **variable aléatoire** réelle X sur un univers Ω associe à chaque issue ω de l'expérience aléatoire un **nombre réel** noté $X(\omega)$.

Exemples

- Nombre de succès lors de lancers d'une pièce.
- Nombre de boules rouges dans une urne.
- Somme obtenue en lançant un dé.
- Nombre de défauts sur une pièce produite.

2 Exemple : lancer un dé

On lance un dé équilibré à 6 faces. On considère la variable aléatoire X qui associe à chaque issue le nombre de points obtenus.



Les issues et les valeurs de X

Issue ω	1	2	3	4	5	6
Valeur $X(\omega)$	1	2	3	4	5	6

► Ici, X prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 chacune avec une probabilité de $\frac{1}{6}$.

3 Loi de probabilité

Définition

La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X donne, pour chaque valeur possible x_i , la probabilité $P(X = x_i)$.

Tableau de loi (pour le dé)

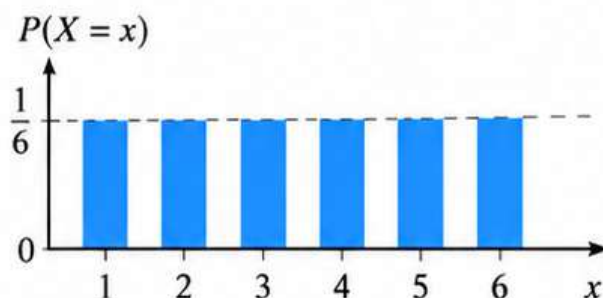
Valeur x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Propriété essentielle

La somme des probabilités vaut 1 : $\sum_i P(X = x_i) = 1$

4 Représentation graphique

On peut représenter la loi de probabilité par un diagramme en bâtons.



5 Événements associés à X

On peut définir des événements à l'aide de la variable aléatoire X .

Exemples

- L'événement $A = \{X = 3\}$: « obtenir 3 ».
- L'événement $B = \{X \leq 2\}$: « obtenir au plus 2 ».
- L'événement $C = \{X \geq 5\}$: « obtenir au moins 5 ».
- L'événement $D = \{1 \leq X \leq 4\}$: « obtenir entre 1 et 4 ».

6 Calcul de probabilités

À partir de la loi, on peut calculer différentes probabilités.

Exemples (pour le dé)

- $P(X = 4) = \frac{1}{6}$
- $P(X \leq 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$
- $P(X \geq 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$
- $P(2 \leq X \leq 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

7 Autre exemple : nombre de pièces obtenues

On lance 3 fois une pièce équilibrée. On considère la variable aléatoire X qui associe à chaque issue le nombre de « pile » obtenus.



Tableau de loi

Valeur x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

8 À ne pas confondre !



Piège classique

La variable aléatoire X ne représente pas une issue, mais une valeur numérique.

Exemple

- L'issue « obtenir 3 » est un élément de Ω .
- La variable aléatoire X associe à cette issue le nombre 3.

Espérance, variance et écart-type des variables aléatoires



1 Espérance d'une variable aléatoire

Définition

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec $p_i = P(X = x_i)$.

L'**espérance** de X est le nombre réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Interprétation

- C'est la « moyenne » des valeurs possibles de X , pondérée par leurs probabilités.
- Elle représente la valeur moyenne (ou gain moyen) à long terme.
- Elle n'est pas forcément une valeur de la variable.

2 Exemple : lancer un dé

On lance un dé équilibré à 6 faces.
On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de points obtenus.



Loi de X

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Calcul de l'espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^6 p_i x_i = \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3,5.$$

3 Propriétés de l'espérance

- Si $X = c$ (constante), alors $E(X) = c$.
- Pour tous réels a et b :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

- Si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.
- Si X et Y sont deux variables aléatoires :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

4 Espérance de X^2

On définit aussi l'espérance de X^2 par :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2$$

Exemple (dé)

$$E(X^2) = \frac{1}{6} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6} \approx 15,17.$$

5 Variance d'une variable aléatoire

Définition

La **variance** de X est le nombre réel :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$$

On a aussi : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Exemple (dé)

$$V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{35}{12} \approx 2,92.$$

6 Écart-type

Définition

L'**écart-type** de X est le nombre réel positif :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Interprétation

L'écart-type mesure la dispersion des valeurs de X autour de son espérance. Plus il est grand, plus les valeurs sont « étalées ».

Exemple (dé)

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1,71.$$



7 Jeu équitable, favorable ou défavorable

On considère un jeu qui fait gagner X euros.

- Jeu équitable si $E(X) = 0$.
- Jeu favorable si $E(X) > 0$.
- Jeu défavorable si $E(X) < 0$.



8 À retenir

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2$$

avec $p_i = P(X = x_i)$

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

- $E(X + b) = E(X) + b$
- $E(aX) = aE(X)$
- $\sigma(X) \geq 0$

Épreuve et loi de Bernoulli



1 Épreuve de Bernoulli

Définition

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui possède exactement deux issues :

- un succès S de probabilité p (avec $0 \leq p \leq 1$),
- un échec $\bar{S}$ de probabilité $1 - p$.

Exemples

- Lancer une pièce : $S =$ « obtenir Pile ».
- Lancer un dé : $S =$ « obtenir un 6 ».
- Test médical : $S =$ « le test est positif ».
- Question à choix multiple : $S =$ « réponse correcte ».

2 Variable de Bernoulli

On associe à une épreuve de Bernoulli une variable aléatoire X qui vaut :

- 1 si l'épreuve est un succès,
- 0 si l'épreuve est un échec.

On dit que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p , et on note :

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

avec $0 \leq p \leq 1$.

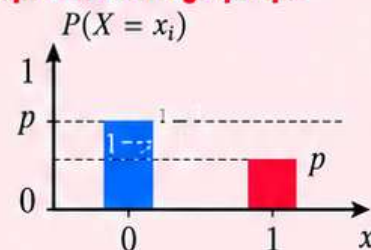


3 Loi de probabilité

La variable X prend les valeurs 0 et 1, avec la loi suivante :

Valeur x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

Représentation graphique



4 Espérance

L'espérance d'une variable de Bernoulli est égale à la probabilité du succès :

$$E(X) = p$$

Interprétation

L'espérance représente la proportion moyenne de succès lors de la répétition d'un grand nombre d'épreuves identiques.

5 Variance et écart-type

La **variance** d'une variable de Bernoulli vaut :

$$V(X) = p(1 - p)$$

et l'**écart-type** vaut :

$$\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$$

Interprétation

La variance (et donc l'écart-type) mesure la dispersion de X . Elle est maximale pour $p = 0,5$ et vaut alors 0,25.

6 Propriétés

- $0 \leq p \leq 1$.
- $E(X) = p$.
- $V(X) = p(1 - p)$.
- $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.
- Si $p = 0$ ou $p = 1$ alors X est certaine (et $V(X) = 0$).
- $V(X)$ est maximale pour $p = 0,5$: $V(X) = 0,25$ et $\sigma(X) = 0,5$.

Remarque

La loi de Bernoulli est un cas particulier de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 1$.

7 Exemple : lancer un dé

On lance un dé équilibré à 6 faces.

On considère l'épreuve : « obtenir un 6 ».

- C'est une épreuve de Bernoulli avec $p = \frac{1}{6}$.
- On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient un 6, et 0 sinon.



Loi de probabilité

Valeur x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Calculs

- $E(X) = p = \frac{1}{6} \approx 0,17$.
- $V(X) = p(1 - p) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36} \approx 0,14$.
- $\sigma(X) = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6} \approx 0,37$.

8 Autres exemples

1) Lancer une pièce équilibrée

- ▶ $p = \frac{1}{2}$.
- ▶ $E(X) = \frac{1}{2} = 0,5$.
- ▶ $V(X) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$.
- ▶ $\sigma(X) = \frac{1}{2} = 0,5$.



2) Test médical

La probabilité qu'un test soit positif est $p = 0,02$.

On note X la variable qui vaut 1 si le test est positif, 0 sinon.

- $E(X) = 0,02$.
- $V(X) = 0,02 \times 0,98 = 0,0196$.
- $\sigma(X) \approx 0,14$.



9 À retenir

$$X \sim \mathcal{B}(p) \\ (0 \leq p \leq 1)$$

$$E(X) = p$$

$$V(X) = p(1 - p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$$



Schéma de Bernoulli

Répétitions d'épreuves identiques et indépendantes



1 Répétition d'épreuves de Bernoulli

Définition

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques** et **indépendantes**,

où :

- à chaque épreuve :
 - succès** S de probabilité p ,
 - échec** $\bar{S}$ de probabilité $1 - p$,
- les épreuves sont indépendantes,
- les épreuves sont identiques (même p).

2 Succession précise de résultats

La probabilité d'une succession comportant exactement k succès (et donc $n - k$ échecs) vaut :

$$p^k (1 - p)^{n-k}$$

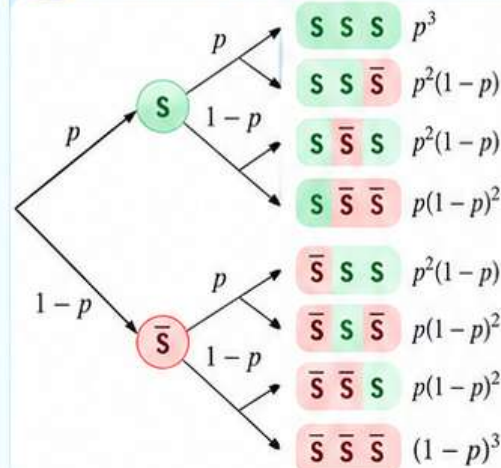
Exemple ($n = 3$)

La probabilité de la succession $S, \bar{S}, S$ est :

$$p(1 - p)p = p^2(1 - p).$$



3 Arbre de probabilités ($n = 3$)



4 Nombre de chemins avec k succès

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , le nombre de suites comportant exactement k succès est le **coefficient binomial** :

$$\binom{n}{k}$$

Rappel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n).$$

5 Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

On considère la variable aléatoire X qui associe à chaque succession le nombre de succès obtenus.

Alors X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p , notée :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

6 Propriétés

- $0 \leq p \leq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
- X prend les valeurs $0, 1, \dots, n$.
- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = 1$.

Espérance

$$E(X) = np$$

Variance

$$V(X) = np(1 - p)$$

Écart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

7 Comment reconnaître un schéma de Bernoulli ?

Pour utiliser une loi binomiale, il faut vérifier que :

- On répète un même type d'épreuve un nombre fixe de fois n .
- Chaque épreuve n'a que deux issues : succès ou échec.
- La probabilité de succès est la même à chaque épreuve.
- Les épreuves sont indépendantes.

8 Exemples de situations

Lancer une pièce

On lance une pièce équilibrée n fois.

- Succès : « obtenir Pile ».
- $p = \frac{1}{2}$.
- X : nombre de Pile.
- $X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.



Tirage avec remise

On effectue n tirages **avec remise** dans une urne contenant des boules rouges et non rouges.

- Succès : « obtenir une boule rouge ».
- p : proportion de boules rouges.
- $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.



Questionnaire à choix multiple

Un QCM comporte n questions indépendantes, chacune avec une seule bonne réponse.

- Succès : « répondre correctement ».
- p : probabilité de succès sur une question.
- $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.



9 Exemple complet

On lance un dé équilibré 10 fois.
On considère la variable X qui compte le nombre de « 6 » obtenus.

- $n = 10$.
- $p = \frac{1}{6}$.
- $X \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{6})$.



Calcul de quelques probabilités

- $P(X = 0) = \binom{10}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,161$.
- $P(X = 1) = \binom{10}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^9 \approx 0,323$.
- $P(X = 2) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0,290$.
- $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,839$.

10 À retenir

- Schéma de Bernoulli** : n épreuves identiques et indépendantes, deux issues, succès de probabilité p .
- $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.
- $E(X) = np$ $V(X) = np(1 - p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$



Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$



1 Définition

Une variable aléatoire X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p , notée $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, si :

- on répète n fois une même épreuve de Bernoulli,
- les épreuves sont **identiques** et **indépendantes**,
- à chaque épreuve, la probabilité de succès est p ($0 \leq p \leq 1$),
- X compte le **nombre de succès** obtenus au cours des n épreuves.

2 Loi de probabilité

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

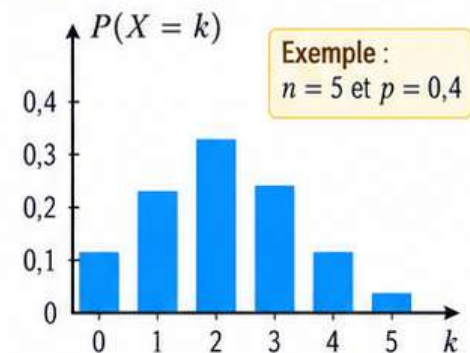
avec

- n : nombre d'épreuves,
- p : probabilité de succès à chaque épreuve,
- k : nombre de succès.



3 Représentation graphique

La loi binomiale est représentée par un diagramme en bâtons.



4 Cas particuliers

- Probabilité d'aucun succès :

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} (1 - p)^n = (1 - p)^n$$

- Probabilité de n succès :

$$P(X = n) = \binom{n}{n} p^n = p^n$$

- Probabilité d'au moins un succès :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$$

- Probabilité d'au plus n succès :

$$P(X \leq n) = 1 \text{ (toujours vraie).}$$

5 Espérance, variance et écart-type

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors :

Espérance

$$E(X) = np$$

Variance

$$V(X) = np(1 - p)$$

Écart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

Interprétation

- L'espérance est le nombre moyen de succès.
- La variance (et donc l'écart-type) mesure la dispersion du nombre de succès autour de sa valeur moyenne.

6 Propriétés

- $0 \leq p \leq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
- X prend ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$.
- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = 1$.
- $E(X) = np$.
- $V(X) = np(1 - p)$.
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.
- La loi binomiale est une généralisation de la loi de Bernoulli (cas $n = 1$).

Remarque

La loi binomiale modélise de nombreuses situations : répétition de tests, contrôle qualité, sondages, jeux, ...

7 Exemple 1 : lancer une pièce

On lance 10 fois une pièce équilibrée. On note X le nombre de « Pile » obtenus.

- $n = 10$, $p = \frac{1}{2}$.
- $X \sim \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$.



Calculs

- $P(X = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \binom{10}{3} \frac{1}{2^{10}} = \frac{120}{1024} \approx 0,117$.
- $E(X) = 10 \times \frac{1}{2} = 5$.
- $V(X) = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2,5$.
- $\sigma(X) = \sqrt{2,5} \approx 1,58$.

8 Exemple 2 : tirage avec remise

On effectue 8 tirages avec remise dans une urne contenant 3 boules rouges et 2 boules noires. On note X le nombre de boules rouges tirées.

- $n = 8$, $p = \frac{3}{5} = 0,6$.
- $X \sim \mathcal{B}(8, 0,6)$.



Calculs

- $P(X = 5) = \binom{8}{5} 0,6^5 \times 0,4^3 = 56 \times 0,6^5 \times 0,4^3 \approx 0,279$.
- $E(X) = 8 \times 0,6 = 4,8$.
- $V(X) = 8 \times 0,6 \times 0,4 = 1,92$.
- $\sigma(X) = \sqrt{1,92} \approx 1,39$.

9 Méthode pour modéliser

- 1 Identifier l'épreuve de Bernoulli et le succès.
- 2 Vérifier que les épreuves sont identiques et indépendantes.
- 3 Déterminer n (nombre d'épreuves).
- 4 Déterminer p (probabilité de succès).
- 5 Conclure : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

10 À retenir

- $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ ($0 \leq p \leq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$).
- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.
- $E(X) = np$.
- $V(X) = np(1 - p)$.
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.



Calculer des probabilités avec la loi binomiale

Variables aléatoires et loi binomiale



Lorsque X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, il faut d'abord traduire correctement la phrase en écriture probabiliste : exactement, au plus, au moins, plus de, moins de, entre deux valeurs.

1 Exactement k succès

Exactement k succès correspond à $P(X = k)$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Exemple : X suit $\mathcal{B}(12; 0,3)$.

$$P(X = 4) = \binom{12}{4} \times 0,3^4 \times 0,7^8 \approx 0,231.$$

2 Au plus k succès

Au plus k signifie k ou moins, donc $P(X \leq k)$.

$$P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = k).$$

Exemple : X suit $\mathcal{B}(12; 0,3)$.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,253.$$

3 Au moins k succès

Au moins k signifie k ou plus, donc $P(X \geq k)$.

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1).$$

Exemple : X suit $\mathcal{B}(12; 0,3)$.

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0,507.$$

⚠ Piège : $P(X \geq k) \neq 1 - P(X \leq k)$.
Le complémentaire de $\{X \geq k\}$ est $\{X \leq k-1\}$.

4 Plus de k succès

Plus de k succès signifie $X > k$.

$$P(X > k) = P(X \geq k+1) = 1 - P(X \leq k).$$

5 Moins de k succès

Moins de k succès signifie $X < k$.

$$P(X < k) = P(X \leq k-1).$$

6 Entre deux valeurs

Pour des entiers a et b avec $a \leq b$:

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a-1).$$

Exemple : X suit $\mathcal{B}(12; 0,3)$.

$$P(2 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1) \approx 0,797.$$

7 Exemple complet

Une entreprise sait que 8 % des pièces fabriquées sont défectueuses. On prélève 25 pièces de manière indépendante. On note X le nombre de pièces défectueuses. Alors X suit la loi $\mathcal{B}(25; 0,08)$.

- $P(X = 2) = \binom{25}{2} \times 0,08^2 \times 0,92^{23} \approx 0,282.$
- $P(X \leq 2) \approx 0,677.$
- $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0,323.$



8 À toi de jouer

On considère X suit $\mathcal{B}(20; 0,4)$. Traduire puis calculer :

- 1 Obtenir exactement 8 succès.
- 2 Obtenir au plus 6 succès.
- 3 Obtenir au moins 10 succès.
- 4 Obtenir entre 5 et 9 succès, bornes comprises.



Correction

- 1 $P(X = 8) = \binom{20}{8} \times 0,4^8 \times 0,6^{12} \approx 0,180.$
- 2 $P(X \leq 6) \approx 0,250.$
- 3 $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 0,245.$
- 4 $P(5 \leq X \leq 9) = P(X \leq 9) - P(X \leq 4) \approx 0,704.$



À retenir

Exactement :

$$P(X = k)$$

Au plus :

$$P(X \leq k)$$

Au moins :

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$$

Entre a et b :

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a-1)$$

Espérance, variance et écart-type d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

1 Définition et formules

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors :

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1 - p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

- n : nombre d'épreuves.
- p : probabilité de succès à chaque épreuve.
- $E(X)$: espérance (nombre moyen de succès).
- $V(X)$: variance (mesure de la dispersion).
- $\sigma(X)$: écart-type (racine carrée de la variance).

2 Interprétation

Espérance $E(X) = np$

- Nombre moyen (théorique) de succès au cours des n épreuves.
- Sur un grand nombre de répétitions, le nombre de succès observé est proche de np .

Variance $V(X) = np(1 - p)$

- Mesure la dispersion du nombre de succès autour de sa valeur moyenne.
- Plus la variance est grande, plus les résultats sont variables.

Écart-type $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$

- Mesure l'écart moyen par rapport à l'espérance.
- S'exprime dans la même unité que X (nombre de succès).

3 Justification (idée)

On considère n épreuves de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès p . On note, pour $1 \leq i \leq n$, la variable X_i qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon. Alors $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

- Chaque X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p .
- $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1 - p)$.
- Les X_i sont indépendantes.

Donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + \dots + X_n) \\ &= E(X_1) + \dots + E(X_n) = np. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= V(X_1 + \dots + X_n) \\ &= V(X_1) + \dots + V(X_n) \\ &= np(1 - p). \end{aligned}$$

4 Exemple 1 : lancer une pièce

On lance 10 fois une pièce équilibrée. On note X le nombre de « Pile » obtenus.

Alors $X \sim \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$.



Calculs

- $E(X) = 10 \times \frac{1}{2} = 5$.
- $V(X) = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2,5$.
- $\sigma(X) = \sqrt{2,5} \approx 1,58$.

5 Exemple 2 : tirage avec remise

On effectue 8 tirages avec remise dans une urne contenant 3 boules rouges et 2 boules noires. On note X le nombre de boules rouges tirées.

Alors $X \sim \mathcal{B}\left(8, \frac{3}{5}\right)$ ($p = 0,6$).



Calculs

- $E(X) = 8 \times 0,6 = 4,8$.
- $V(X) = 8 \times 0,6 \times 0,4 = 1,92$.
- $\sigma(X) = \sqrt{1,92} \approx 1,39$.

6 Comparaison de deux lois

On compare deux lois ayant la même espérance. Soient $X \sim \mathcal{B}(20, 0,3)$ et $Y \sim \mathcal{B}(10, 0,6)$.

Loi	n	p	E	V	σ
X	20	0,3	6	4,2	$\approx 2,05$
Y	10	0,6	6	2,4	$\approx 1,55$

Conclusion

- Les deux lois ont la même espérance (6).
- La loi X est plus dispersée que la loi Y (variance et écart-type plus grands).

7 Déterminer p à partir de l'espérance

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et si l'on connaît $E(X) = m$, alors :

$$p = \frac{m}{n} \quad (\text{avec } 0 \leq p \leq 1)$$

Exemple

On effectue 50 tirs indépendants et l'on souhaite que le nombre moyen de succès soit 12.

Alors $p = \frac{12}{50} = 0,24$.

8 Problème complet



Une machine remplit des bouteilles d'eau. La probabilité qu'une bouteille soit non conforme est de 0,05. On prélève au hasard 15 bouteilles. On note X le nombre de bouteilles non conformes.

- 1 Déterminer la loi suivie par X .
- 2 Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type.
- 3 Interpréter l'espérance.
- 4 Quelle est la probabilité d'avoir au moins 3 bouteilles non conformes ?

9 Corrigé du problème

1 $X \sim \mathcal{B}(15, 0,05)$.

2 $E(X) = 15 \times 0,05 = 0,75$.
 $V(X) = 15 \times 0,05 \times 0,95 = 0,7125$.
 $\sigma(X) = \sqrt{0,7125} \approx 0,845$.

3 **Interprétation**

En moyenne, on peut s'attendre à environ 0,75 bouteille non conforme sur 15. Donc en général 0, 1 ou éventuellement 2.

4 $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$
 $= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$
 $= 1 - \left[\binom{15}{0} 0,05^0 0,95^{15} + \binom{15}{1} 0,05^1 0,95^{14} + \binom{15}{2} 0,05^2 0,95^{13} \right]$
 $\approx 1 - (0,4634 + 0,3651 + 0,1354)$
 $= 0,0361$. $P(X \geq 3) \approx 0,036$.