

Corrigé

Géométrie dans l'espace



Explorer
Comprendre
Réussir !

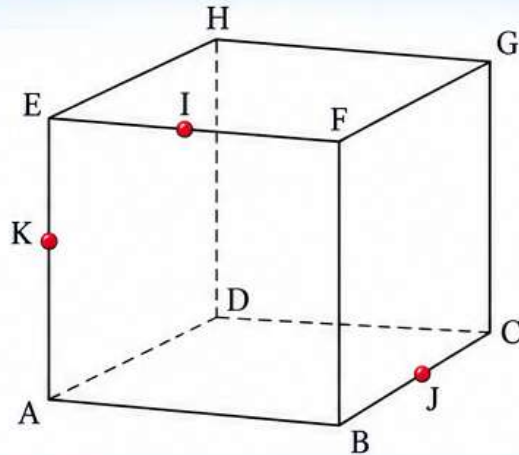


Rappel de l'énoncé

On considère le cube de sommets A, B, C, D, E, F, G, H .

Les points I, J et K sont définis sur certaines arêtes du cube comme indiqué sur la figure.

Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



I milieu de $[EF]$
 J milieu de $[BC]$
 K milieu de $[AE]$
(cube de côté 1)

1 Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ?

Vecteurs directeurs :

- Les coordonnées de I sont $I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$.

$$\text{Donc } \overrightarrow{AI} \left(\frac{1}{2}; 0; 1 \right).$$

- Les coordonnées de K sont $K\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ et $H(0; 1; 1)$.

$$\text{Donc } \overrightarrow{KH} = H - K \left(0; 1; \frac{1}{2} \right).$$

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{AI} \left(\frac{1}{2}; 0; 1 \right)$ et $\overrightarrow{KH} \left(0; 1; \frac{1}{2} \right)$ ne sont pas colinéaires (pas de nombre réel k tel que $\left(\frac{1}{2}; 0; 1 \right) = k \left(0; 1; \frac{1}{2} \right)$).

Conclusion : les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.

2 Coordonnées et coplanarité

a Coordonnées des points I et J

I est le milieu de $[EF]$ donc $I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$.

J est le milieu de $[BC]$ donc $J\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$.

b Coplanarité des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$

Calcul des vecteurs :

- $\overrightarrow{IJ} = J - I = \left(1 - \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - 0; 0 - 1\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$.
- $\overrightarrow{AE} = (0; 0; 1)$.
- $\overrightarrow{AC} = (1; 1; 0)$.

Expression de $\overrightarrow{IJ}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} &= \frac{1}{2} (1; 1; 0) - (0; 0; 1) \\ &= \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) - (0; 0; 1) \\ &= \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right) \\ &= \overrightarrow{IJ}. \end{aligned}$$

Conclusion : $\overrightarrow{IJ}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

