

1 Placement des points (rappel)

D'après l'énoncé :

- M est le milieu du segment $[BC]$ (donc M appartient à l'arête $[BC]$).
- N est le milieu du segment $[CD]$ (donc N appartient à l'arête $[CD]$).
- $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{4} \overrightarrow{EH}$ donc P appartient à l'arête $[EH]$, à un quart de E vers H .

2 Coordonnées des points M , N et P

Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, les sommets du cube d'arête 1 ont pour coordonnées :

$$\begin{array}{ll} A(0; 0; 0) & E(0; 0; 1) \\ B(1; 0; 0) & F(1; 0; 1) \\ C(1; 1; 0) & G(1; 1; 1) \\ D(0; 1; 0) & H(0; 1; 1) \end{array}$$

Point M (milieu de $[BC]$)

$B(1; 0; 0)$ et $C(1; 1; 0)$
donc

$$M\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$$

Point N (milieu de $[CD]$)

$C(1; 1; 0)$ et $D(0; 1; 0)$
donc

$$N\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$$

Point P (sur $[EH]$)

$E(0; 0; 1)$ et $H(0; 1; 1)$
 $\overrightarrow{EH} = (0; 1; 0)$

$$\overrightarrow{EP} = \frac{1}{4} \overrightarrow{EH} = \left(0; \frac{1}{4}; 0\right)$$

donc

$$P\left(0; \frac{1}{4}; 1\right)$$

3 Représentations paramétriques des droites

a) Droite (AD)

Un vecteur directeur de (AD) est $\overrightarrow{AD} = (0; 1; 0)$.
Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b) Droite (MN)

Un vecteur directeur de (MN) est $\overrightarrow{MN} = N - M = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.
Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{t}{2} \\ y = \frac{1}{2} + \frac{t}{2} \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

4 Les droites (MN) et (AD) sont sécantes

Les deux droites sont contenues dans le plan $z = 0$.

Leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{AD} = (0; 1; 0)$ et $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$

ne sont pas colinéaires (la première composante de $\overrightarrow{AD}$ est nulle alors que celle de $\overrightarrow{MN}$ est non nulle).

Donc les droites (MN) et (AD) sont sécantes en un unique point L .

5 Coordonnées du point d'intersection L

On résout le système formé par les deux représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 - \frac{s}{2} \\ y = \frac{1}{2} + \frac{s}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

De $x = 0$, on obtient $1 - \frac{s}{2} = 0$ donc $s = 2$.

Alors $y = t = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$ et $z = 0$. Ainsi $L\left(0; \frac{3}{2}; 0\right)$

6 Les vecteurs $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{HN}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont-ils coplanaires ?

On calcule leurs coordonnées :

$$\begin{array}{l} H(0; 1; 1), \\ M\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), \quad N\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right), \\ D(0; 1; 0), \quad F(1; 0; 1). \end{array}$$

$$\overrightarrow{HM} = M - H = \left(1; -\frac{1}{2}; -1\right)$$

$$\overrightarrow{HN} = N - H = \left(\frac{1}{2}; 0; -1\right)$$

$$\overrightarrow{DF} = F - D = (1; -1; 1)$$

On cherche s'il existe a et b tels que :

$$\overrightarrow{DF} = a \overrightarrow{HM} + b \overrightarrow{HN},$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} a + \frac{b}{2} = 1 \\ -\frac{a}{2} = -1 \\ -a - b = 1 \end{cases}$$

De la deuxième équation, on obtient $a = 2$.

En remplaçant dans la troisième, on trouve $2 + b = -1$ donc $b = -3$.

Avec ces valeurs, la première équation donne $2 + \frac{-3}{2} = \frac{1}{2} \neq 1$.

Conclusion : le système n'a pas de solution. Il n'existe pas de réels a et b tels que $\overrightarrow{DF} = a \overrightarrow{HM} + b \overrightarrow{HN}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{HN}$ et $\overrightarrow{DF}$ ne sont pas coplanaires.