

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Corrigé détaillé

Voir
Représenter
Raisonner

Rappel de l'énoncé

On se place dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points :

$$A(1; 2; 0), \quad B(3; -1; 1), \\ C(0; 1; 2) \quad \text{et} \quad D(2; 0; -1).$$

1 Représentation paramétrique de la droite D_1 (AB)

Un vecteur directeur de D_1 est $\overrightarrow{AB} = B - A = (3 - 1; -1 - 2; 1 - 0) = (2; -3; 1)$.

Une représentation paramétrique de D_1 est donc :

$$D_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2 Représentation paramétrique de la droite D_2 (CD)

Un vecteur directeur de D_2 est $\overrightarrow{CD} = D - C = (2 - 0; 0 - 1; -1 - 2) = (2; -1; -3)$.

Une représentation paramétrique de D_2 est donc :

$$D_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = 1 - s \\ z = 2 - 3s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

3 Position relative des droites D_1 et D_2

a) Les droites ne sont pas parallèles

Leurs vecteurs directeurs sont $\vec{u} = (2; -3; 1)$ et $\vec{v} = (2; -1; -3)$.

Ils ne sont pas colinéaires (par exemple $\frac{-3}{-1} \neq \frac{1}{-3}$), donc les droites ne sont pas parallèles.

b) Les droites ne sont pas sécantes

On cherche un point commun en résolvant le système :

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2s & (1) \\ 2 - 3t = 1 - s & (2) \\ t = 2 - 3s & (3) \end{cases}$$

D'après (3), $t = 2 - 3s$. En remplaçant dans (1) :

$$1 + 2(2 - 3s) = 2s \Rightarrow 5 - 6s = 2s \Rightarrow 5 = 8s \Rightarrow s = \frac{5}{8}.$$

$$\text{Alors } t = 2 - 3 \times \frac{5}{8} = \frac{1}{8}.$$

On vérifie dans (2) :

$$2 - 3 \times \frac{1}{8} = \frac{13}{8} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

Les deux membres sont différents, donc le système n'admet aucune solution.

$$2 - 3 \times \frac{1}{8} = \frac{13}{8} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

Les deux membres sont différents, donc le système n'admet aucune solution.

Conclusion :

Les droites D_1 et D_2 ne sont ni parallèles ni sécantes. Ce sont deux **droites gauches**.

4 Que peut-on dire des points A, B, C et D ?

Si les points A, B, C et D étaient coplanaires, alors les droites (AB) et (CD), contenues dans un même plan, seraient soit parallèles, soit sécantes.

Or, d'après la question précédente, ces deux droites sont gauches (ni parallèles, ni sécantes).

Donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.



À retenir

- Dans l'espace, deux droites sont soit parallèles, soit sécantes, soit gauches.
- Deux droites coplanaires sont nécessairement parallèles ou sécantes.
- Si deux droites sont gauches, alors elles ne sont pas contenues dans un même plan, et les points définissant ces deux droites ne sont pas coplanaires.

