

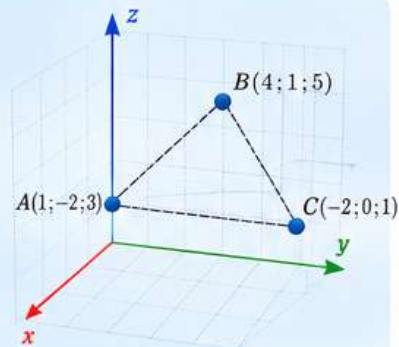
Exercice 1 Coordonnées de vecteurs

Énoncé On considère les points $A(1; -2; 3)$, $B(4; 1; 5)$ et $C(-2; 0; 1)$.

- Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
- Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AC}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
- Les points A , B et C sont-ils alignés ? Justifier.

Corrigé

- $\overrightarrow{AB}(4-1; 1-(-2); 5-3) = (3; 3; 2)$
 $\overrightarrow{AC}(-2-1; 0-(-2); 1-3) = (-3; 2; -2)$
 $\overrightarrow{BC}(-2-4; 0-1; 1-5) = (-6; -1; -4)$
- On cherche α, β tels que $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{BC}$.
 Comme $\overrightarrow{BC} = (-6; -1; -4) = -2(3; 3; 2) + 5(0; -1; 0)$, on peut aussi résoudre directement :
 On remarque que $\overrightarrow{AC} = (-3; 2; -2) = -1(3; 3; 2) + 1(-6; -1; -4)$.
 Donc $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (ils ne sont pas proportionnels).
 Donc les points A , B et C ne sont pas alignés.



À retenir

Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ se calculent par différence : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Exercice 2 Alignement et colinéarité

Énoncé On considère les points $A(2; 1; 0)$, $B(5; 4; 2)$ et $D(8; 7; 4)$.

- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.
- Que peut-on en déduire pour les points A , B et D ?
- Déterminer un réel t tel que $\overrightarrow{AD} = t \overrightarrow{AB}$.
- Le point $E(11; 10; 6)$ appartient-il à la droite (AB) ?

Corrigé

- $\overrightarrow{AB}(5-2; 4-1; 2-0) = (3; 3; 2)$
 $\overrightarrow{AD}(8-2; 7-1; 4-0) = (6; 6; 4) = 2(3; 3; 2) = 2\overrightarrow{AB}$.
 Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.
- Les points A , B et D sont alignés.
- $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$, donc $t = 2$.
- On calcule $\overrightarrow{AE}(11-2; 10-1; 6-0) = (9; 9; 6) = 3(3; 3; 2) = 3\overrightarrow{AB}$.
 Donc E appartient à la droite (AB) .



À retenir

Trois points sont alignés si et seulement si deux vecteurs issus de l'un d'eux sont colinéaires.

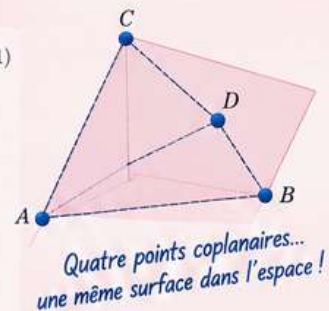
Exercice 3 Coplanarité de quatre points

Énoncé On considère les points $A(0; 1; 2)$, $B(2; -1; 0)$, $C(1; 3; 1)$ et $D(3; 1; 3)$.

- Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- En déduire que les quatre points A , B , C et D sont coplanaires.
- Déterminer deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.
- Le point $E(2; 5; 2)$ appartient-il au même plan que A , B et C ?

Corrigé

- On cherche a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.
 On résout le système : $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ -2a + 2b = 0 \\ -2a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ et } b = 1$.
 Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
- Ainsi, $\overrightarrow{AD}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
 Les points A , B , C et D sont donc coplanaires.
- On a trouvé : $a = 1$ et $b = 1$.
- $\overrightarrow{AE}(2; 4; 0)$. Cherchons α et β tels que $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.
 $\begin{cases} 2\alpha + \beta = 2 \\ -2\alpha + 2\beta = 4 \\ -2\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1, \beta = 4$.
 Le point E appartient au même plan que A , B et C .



À retenir

Quatre points sont coplanaires si l'un des vecteurs est combinaison linéaire de deux autres.

Exercice 4 Représentation paramétrique et appartenance

Énoncé On considère la droite d de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Donner un point et un vecteur directeur de la droite d .
- Le point $A(3; -1; 3)$ appartient-il à la droite d ?
- Déterminer le réel t tel que le point $M(1 + 2t; -3 + t; 4 - t)$ ait une ordonnée égale à 5. En déduire les coordonnées de M .
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par les points $B(0; 2; 1)$ et $C(3; -1; 4)$.

Corrigé

- Un point de d est obtenu pour $t = 0$: $A_0(1; -3; 4)$.
 Un vecteur directeur est $\vec{u}(2; 1; -1)$.
- On cherche t tel que $\begin{cases} 1 + 2t = 3 \\ -3 + t = -1 \\ 4 - t = 3 \end{cases} \Rightarrow t = 1$.
 Les valeurs ne sont pas toutes égales. Donc $A \notin d$.
- On veut $-3 + t = 5 \Rightarrow t = 8$.
 Alors $M(1 + 2 \times 8; -3 + 8; 4 - 8) = (17; 5; -4)$.
- $\overrightarrow{BC}(3; -3; 3) = 3(1; -1; 1)$.
 Une représentation paramétrique est :
 $\begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$
 (ou bien $x = t, y = 2 - t, z = 1 + t$ avec un vecteur directeur $(1; -1; 1)$).



À retenir

Une droite admet une représentation paramétrique :
 $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R},$
 (où $(a; b; c)$ est un vecteur directeur).