

Les maths
ouvrent des
horizons !

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

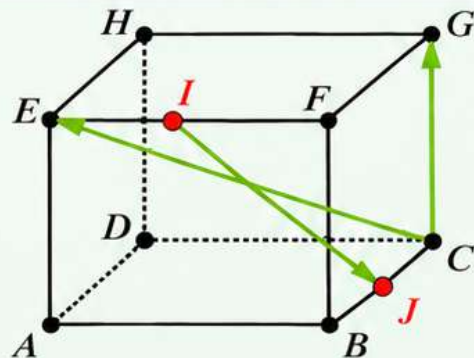
Corrigés détaillés

Voir
Représenter
Raisonner

1 Exercice 1

$ABCDEFGH$ est un cube. I et J sont les milieux respectifs de $[EF]$ et $[BC]$.

- Démontrer que les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{CE}$ et $\vec{CG}$ sont coplanaires à l'aide d'une décomposition.
- Refaire la question 1 à l'aide d'un repère judicieusement choisi.



1 Démonstration par décomposition

On décompose $\vec{IJ}$ en fonction de $\vec{CE}$ et $\vec{CG}$.

I est le milieu de $[EF]$ donc $\vec{EI} = \frac{1}{2}\vec{EF}$.

J est le milieu de $[BC]$ donc $\vec{CJ} = \frac{1}{2}\vec{CB}$.

Alors : $\vec{IJ} = \vec{IE} + \vec{EC} + \vec{CJ} = -\frac{1}{2}\vec{EF} + \vec{EC} + \frac{1}{2}\vec{CB}$.

Or, dans un cube, $\vec{EF} = \vec{AB}$ et $\vec{CB} = -\vec{BC} = -\vec{AD}$,
et $\vec{EC} = \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{AD}$.

Donc $\vec{IJ} = \vec{EA} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$.

De plus, $\vec{CE} = \vec{EA}$ et $\vec{CG} = \vec{CA} + \vec{AG} = \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{AD}$.

Ainsi, $\vec{IJ} = \vec{CE} + \frac{1}{2}(\vec{CG} - \vec{CE}) = \frac{1}{2}\vec{CE} + \frac{1}{2}\vec{CG}$.

Conclusion : les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{CE}$ et $\vec{CG}$ sont coplanaires.

2 Dans un repère

On se place dans le repère $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$.

Alors :

$A(0; 0; 0)$ $B(1; 0; 0)$ $C(1; 1; 0)$ $E(0; 0; 1)$

$F(1; 0; 1)$ $G(1; 1; 1)$

$I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ $J\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$

$\vec{IJ} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$ $\vec{CE} = (-1; -1; 1)$

$\vec{CG} = (0; 0; 1)$

On vérifie : $\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{CE} + \frac{1}{2}\vec{CG}$.

Conclusion : les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{CE}$ et $\vec{CG}$ sont coplanaires.



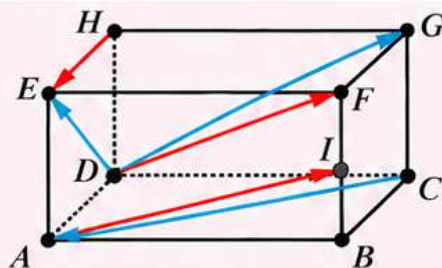
À retenir !

- Trois vecteurs sont coplanaires s'il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
- Dans un cube, on peut raisonner :
 - soit par décomposition de vecteurs,
 - soit en choisissant un repère adapté.

2 Exercice 2

$ABCDEFGH$ est un pavé droit. I est le milieu de $[BF]$.

- Les vecteurs $\vec{CA}$, $\vec{DE}$, $\vec{DG}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.
- Les vecteurs $\vec{AI}$, $\vec{DF}$, $\vec{HE}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.



1 Étude des vecteurs $\vec{CA}$, $\vec{DE}$, $\vec{DG}$

Dans un pavé droit, on a $\vec{DE} = \vec{AB}$ et $\vec{DG} = \vec{DC} + \vec{CG} = \vec{AB} + \vec{AD}$.

De plus, $\vec{CA} = -\vec{AC} = -(\vec{AB} + \vec{AD}) = -\vec{AB} - \vec{AD}$.

On écrit donc : $\vec{CA} = -2\vec{DE} + \vec{DG}$.

Conclusion : les vecteurs $\vec{CA}$, $\vec{DE}$ et $\vec{DG}$ sont coplanaires.

2 Étude des vecteurs $\vec{AI}$, $\vec{DF}$, $\vec{HE}$

On a I milieu de $[BF]$ donc $\vec{BI} = \frac{1}{2}\vec{BF} = \frac{1}{2}\vec{AE}$.

Ainsi $\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{BI} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AE}$.

Or $\vec{DF} = \vec{DA} + \vec{AB} + \vec{AE}$ et $\vec{HE} = \vec{DA}$.

Donc $\vec{AI} = \vec{DF} - \vec{HE} - \frac{1}{2}\vec{AE} = \vec{DF} - \vec{HE} - \frac{1}{2}(\vec{DF} - \vec{HE})$
 $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{DF} - \frac{1}{2}\vec{HE}$.

Conclusion : les vecteurs $\vec{AI}$, $\vec{DF}$ et $\vec{HE}$ sont coplanaires.



À retenir !

- Pour montrer que trois vecteurs sont coplanaires, on exprime l'un d'eux comme combinaison linéaire des deux autres.
- Dans un pavé droit, les arêtes opposées sont parallèles et de même longueur.
- On peut raisonner soit par décomposition, soit dans un repère, selon ce qui est le plus simple.

Explorer
Comprendre
Réussir !

Les maths, une clé
pour ton avenir !