



Corrigé

Exercice de synthèse

Rappel de l'énoncé

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ surmonté d'une pyramide $EFGHS$.

On a : $DC = 6$; $DA = DH = 4$.

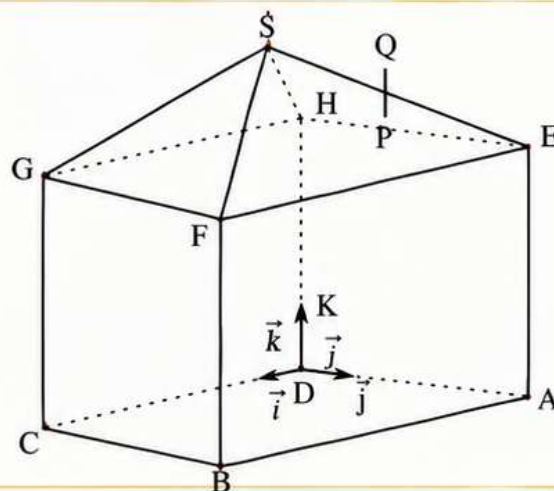
Les points I, J et K sont définis par :

$$\vec{DI} = \frac{1}{6} \vec{DC} ; \quad \vec{DJ} = \frac{1}{4} \vec{DA} ; \quad \vec{DK} = \frac{1}{4} \vec{DH}.$$

On note : $\vec{i} = \vec{DI}$; $\vec{j} = \vec{DJ}$; $\vec{k} = \vec{DK}$.

On se place dans le repère orthonormé $(D ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On admet que le point S a pour coordonnées $(3 ; 2 ; 6)$.



1 Coordonnées des points B, E, F et G

Dans le repère $(D ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

- $\vec{DC} = 6\vec{i}$ donc $C(6 ; 0 ; 0)$.
- $\vec{DA} = 4\vec{j}$ donc $A(0 ; 4 ; 0)$.
- $\vec{DH} = 4\vec{k}$ donc $H(0 ; 0 ; 4)$.

On en déduit :

$$\begin{array}{ll} B(6 ; 4 ; 0) & E(0 ; 4 ; 4) \\ F(6 ; 4 ; 4) & G(6 ; 0 ; 4) \end{array}$$

2 Comparaison des volumes

Volume du parallélépipède rectangle :

$$V_{\text{pavé}} = DC \times DA \times DH = 6 \times 4 \times 4 = 96.$$

Volume de la pyramide $EFGHS$:

La base est le rectangle $EFGH$ de dimensions $EF = DC = 6$ et $EH = DA = 4$.

Aire de la base : $6 \times 4 = 24$.

La hauteur est SO avec O milieu de $[EG]$.

Dans le repère, $E(0 ; 4 ; 4)$, $G(6 ; 0 ; 4)$ donc $O(3 ; 2 ; 4)$.

$S(3 ; 2 ; 6)$ donc $SO = 6 - 4 = 2$.

Ainsi :

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3} \times 24 \times 2 = 16.$$

$$\text{Donc } \frac{V_{\text{pyramide}}}{V_{\text{total}}} = \frac{16}{96} = \frac{1}{6}.$$

Conclusion :

Le volume de la pyramide $EFGHS$ représente le sixième du volume total de la maison.

3 L'antenne $[PQ]$

a) Représentation paramétrique de (PQ)

$P(2 ; 3 ; 5)$ et $Q(2 ; 3 ; 5,5)$.

Le vecteur $\vec{PQ} = Q - P = (0 ; 0 ; 0,5)$.

Une représentation paramétrique de (PQ) est :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5,5 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

b) Longueur PQ

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(2-2)^2 + (3-3)^2 + (5,5-5)^2} \\ &= \sqrt{0 + 0 + 0,5^2} = 0,5. \end{aligned}$$

Ainsi, $PQ = 0,5$ (unité de longueur).

4 Position relative des droites (PQ) et Δ

La droite Δ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4 + 6s \\ y = 7 - 4s \\ z = 2 + 4s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Les droites (PQ) et Δ sont-elles sécantes ?

Pour qu'un point de Δ appartienne à (PQ) , il faut $x = 2$ et $y = 3$.

$$-4 + 6s = 2 \Rightarrow 6s = 6 \Rightarrow s = 1.$$

$$7 - 4s = 3 \Rightarrow 7 - 4 = 3 \quad (\text{vrai}).$$

Pour $s = 1$, on obtient le point $(2 ; 3 ; 6)$.

Sur la droite (PQ) , on a toujours $x = 2$, $y = 3$ et $z = 5,5 + t$. Pour avoir $z = 6$, il faudrait $5,5 + t = 6 \Rightarrow t = 0,5$.

Cela correspondrait au point $(2 ; 3 ; 6)$, qui n'appartient pas au segment $[PQ]$ (car sur $[PQ]$, $5 \leq z \leq 5,5$).

Conclusion : Les droites (PQ) et Δ sont sécantes en le point $(2 ; 3 ; 6)$, mais ce point n'appartient pas au segment $[PQ]$. L'oiseau ne percute donc pas l'antenne.