



GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Corrigé détaillé

Voir
Représenter
Raisonner

Rappel de l'énoncé

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(1; 0; 2) \quad B(3; 1; 3) \quad C(0; 2; 1) \quad D(4; 4; 3)$$

et le point $E(2; 1; 2)$.

1 Coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 1; 1 - 0; 3 - 2) = (2; 1; 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0 - 1; 2 - 0; 1 - 2) = (-1; 2; -1)$$

$$\overrightarrow{AD} = (4 - 1; 4 - 0; 3 - 2) = (3; 4; 1)$$

2 Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils colinéaires ?

On cherche s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$.

$$\text{Cela donnerait : } (-1; 2; -1) = k(2; 1; 1)$$

$$\text{soit } -1 = 2k, \quad 2 = k, \quad -1 = k.$$

Ces égalités sont impossibles à satisfaire simultanément.

Conclusion : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

3 Coplanarité des points A, B, C, D

On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AD} = a \overrightarrow{AB} + b \overrightarrow{AC}$,
c'est-à-dire : $(3; 4; 1) = a(2; 1; 1) + b(-1; 2; -1)$.

$$\text{On obtient le système : } \begin{cases} 2a - b = 3 & (1) \\ a + 2b = 4 & (2) \\ a - b = 1 & (3) \end{cases}$$

De (3) : $a = 1 + b$. En remplaçant dans (1) : $2(1 + b) - b = 3 \Rightarrow b = 1$,
et donc $a = 2$. On vérifie dans (2) : $2 + 2 \times 1 = 4$ (vrai).

Conclusion : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC}$.

Les points A, B, C et D sont donc coplanaires.

4 Représentation paramétrique de la droite $d_1 = (\overline{AB})$

Un vecteur directeur de d_1 est $\overrightarrow{AB} = (2; 1; 1)$.

$$\text{Une représentation paramétrique est : } d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5 Représentation paramétrique de la droite $d_2 = (\overline{CD})$

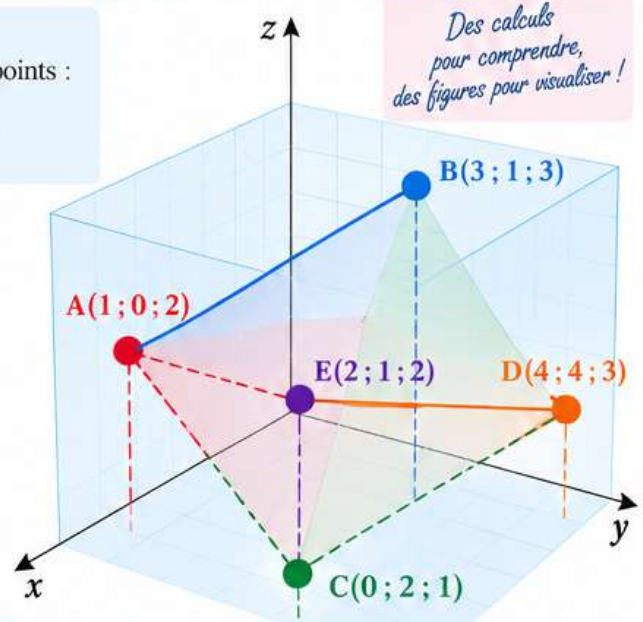
Un vecteur directeur de d_2 est $\overrightarrow{CD} = (4; 4; 3) - (0; 2; 1) = (4; 2; 2)$.

$$\text{Une représentation paramétrique est : } d_2 : \begin{cases} x = 4s \\ y = 2 + 2s \\ z = 1 + 2s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

8 Question de synthèse

Pour déterminer si quatre points de l'espace sont coplanaires, on peut :

- choisir un point, par exemple A , et étudier si les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires (c'est-à-dire si l'un d'eux est une combinaison linéaire des deux autres) ;
- ou encore montrer que deux droites, par exemple (AB) et (CD) , sont sécantes ou parallèles (auquel cas les quatre points sont coplanaires) ;
- s'ils sont ni parallèles ni sécantes (droites gauches), alors les quatre points ne sont pas coplanaires.



Des calculs
pour comprendre,
des figures pour visualiser !

6 Position relative des droites d_1 et d_2

Les vecteurs directeurs sont $\vec{u}_1 = (2; 1; 1)$ et $\vec{u}_2 = (4; 2; 2) = 2\vec{u}_1$.

Ils sont colinéaires donc les droites sont parallèles ou confondues.

On vérifie si elles ont un point commun en résolvant :

$$\begin{cases} 1 + 2t = 4s & (1) \\ t = 2 + 2s & (2) \\ 2 + t = 1 + 2s & (3) \end{cases}$$

De (2) : $t = 2 + 2s$. Dans (3) : $2 + (2 + 2s) = 1 + 2s \Rightarrow 4 + 2s = 1 + 2s$,
soit $4 = 1$, impossible.

Conclusion : Les droites d_1 et d_2 sont parallèles distinctes.

7 La droite d_3 passant par $E(2; 1; 2)$

et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Représentation paramétrique : $d_3 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$

b) Comparaison des vecteurs directeurs : $\vec{u}_1 = (2; 1; 1)$ et $\vec{u} = (2; 1; 1)$.
Ils sont égaux : les droites d_1 et d_3 sont parallèles.

c) Vérifions si elles sont confondues : on teste si $E(2; 1; 2)$ appartient à d_1 .

$$\text{Sur } d_1 : x = 1 + 2t = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Alors } y = t = \frac{1}{2} \neq 1. \text{ Donc } E \notin d_1.$$

Conclusion : Les droites d_1 et d_3 sont parallèles distinctes.



À retenir !

- ✓ Deux vecteurs sont colinéaires $\Leftrightarrow$ coordonnées proportionnelles.
- ✓ Trois vecteurs sont coplanaires $\Leftrightarrow$ combinaison linéaire.
- ✓ Deux droites de l'espace sont parallèles, sécantes ou gauches.
- ✓ Deux droites parallèles sont soit confondues, soit distinctes.
- ✓ Quatre points sont coplanaires si (et seulement si) les vecteurs correspondants sont coplanaires, ou si deux droites qui les portent sont parallèles ou sécantes.

Les maths ouvrent des horizons !

Explorer
Comprendre
Réussir