

Exercice de synthèse

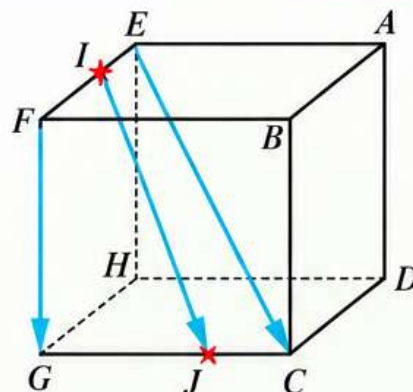
Corrigé

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre.

Les points I et J vérifient :

$$\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{EF} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{GC}.$$

On veut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont coplanaires.



1 Méthode vectorielle

On exprime $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EG}$.

1 Expression de $\overrightarrow{EJ}$

$$\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GJ} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{GC}.$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EG} + \frac{2}{3} \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EG} + \frac{2}{3} (\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EG})$$

$$\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{EG} + \frac{2}{3} \overrightarrow{EC}.$$

2 Expression de $\overrightarrow{EI}$

$$\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{EF} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG} - \overrightarrow{FG}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{EI} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{FG}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{EG} - \frac{1}{3} \overrightarrow{FG}.$$

3 Expression de $\overrightarrow{IJ}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{EJ} - \overrightarrow{EI} \\ &= \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{EG} + \frac{2}{3} \overrightarrow{EC} \right) - \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{EG} - \frac{1}{3} \overrightarrow{FG} \right) \\ &= \frac{2}{3} \overrightarrow{EC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{FG} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EG} - \overrightarrow{EF}.$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{EC} + \frac{1}{3} (\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{EF})$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{EC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{EG}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EG}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont coplanaires.

2 Méthode analytique

a Coordonnées des points

Dans le repère $(G ; \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GF})$:

$$G(0; 0; 0)$$

$$E(0; 1; 1)$$

$$C(1; 0; 0)$$

$$I\left(0; \frac{1}{3}; 1\right)$$

$$H(0; 1; 0)$$

$$F(0; 0; 1)$$

$$J\left(\frac{2}{3}; 0; 0\right)$$

b Coordonnées des vecteurs

$$\overrightarrow{IJ} = J - I = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1\right)$$

$$\overrightarrow{EC} = C - E = (1; -1; -1)$$

$$\overrightarrow{FG} = G - F = (0; 0; -1)$$

c Coplanarité

On écrit $\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$:

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{EC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{FG}$$

$$\begin{aligned} \text{car } & \frac{2}{3}(1; -1; -1) + \frac{1}{3}(0; 0; -1) \\ &= \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -1\right) + \left(0; 0; -\frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1\right) = \overrightarrow{IJ}. \end{aligned}$$

Conclusion

Les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont coplanaires.