



VECTEURS, DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Explorer
Représenter
Comprendre

1 Vecteurs de l'espace

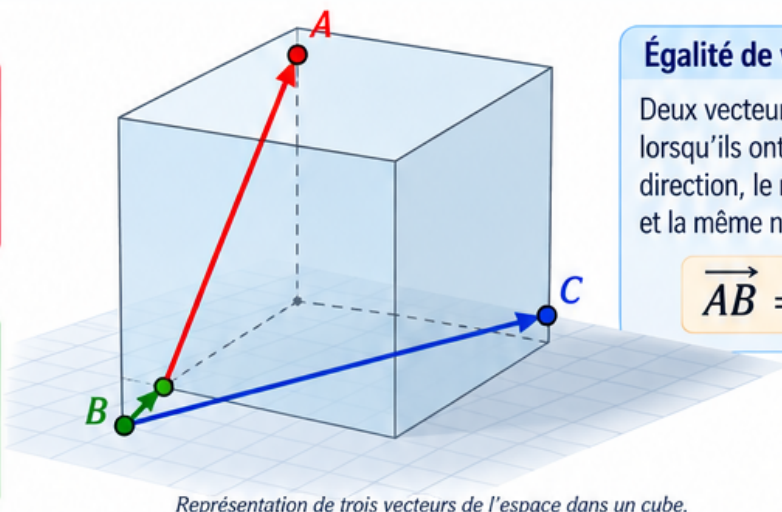
Définition

Un **vecteur** de l'espace est défini par :

- une **direction** de l'espace,
- un **sens**,
- une **norme** (ou longueur).

Remarque

Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : relation de Chasles, addition de vecteurs, propriétés de colinéarité, etc.



Représentation de trois vecteurs de l'espace dans un cube.

Égalité de vecteurs

Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

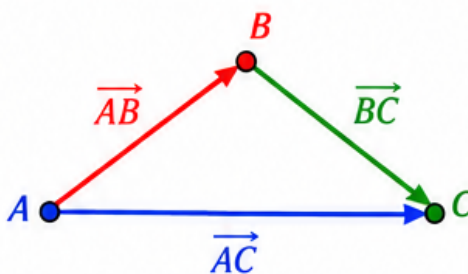
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

2 Relation de Chasles

Pour tous points A, B, C de l'espace, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Cette relation reste valable dans l'espace, comme dans le plan.



Conséquence

On peut ainsi écrire, par exemple :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$$

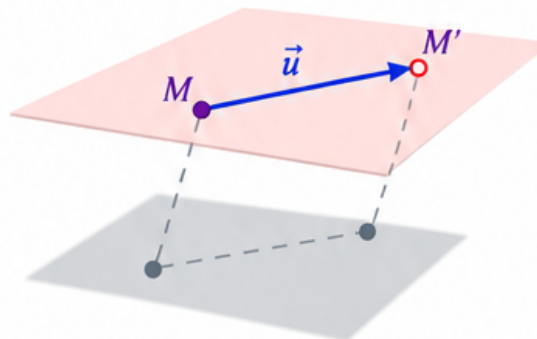
pour tout point M .

3 Translation

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. On appelle **translation de vecteur $\vec{u}$** la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$



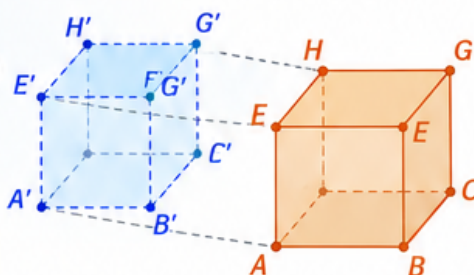
Remarque

Les translations conservent les propriétés usuelles : parallélisme, orthogonalité, longueurs, milieux, aires et volumes.

Exemple

Sur la figure ci-contre, le parallélépipède ABCDEEGH est l'image du parallélépipède $A'B'C'D'E'F'G'H'$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

$$\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{D'D} = \dots$$



À retenir

- Un **vecteur** est défini par une **direction**, un **sens** et une **norme**.
- La relation de Chasles est valable dans l'espace.
- Une translation de vecteur $\vec{u}$ associe à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et conserve les propriétés géométriques.

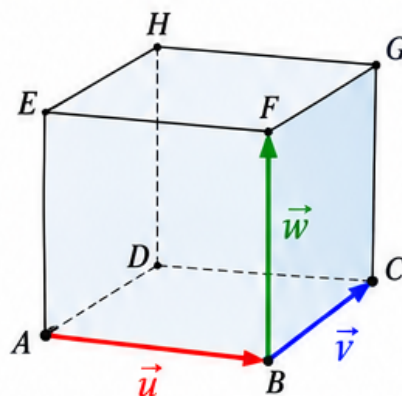
4 Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace

Définition

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Tout vecteur de la forme

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, est appelé
combinaison linéaire des vecteurs
 $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.



Un repère naturel dans le cube : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{BF}$.

Exemple 1

Dans le cube ci-contre, les vecteurs
suivants sont des combinaisons
linéaires de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$$

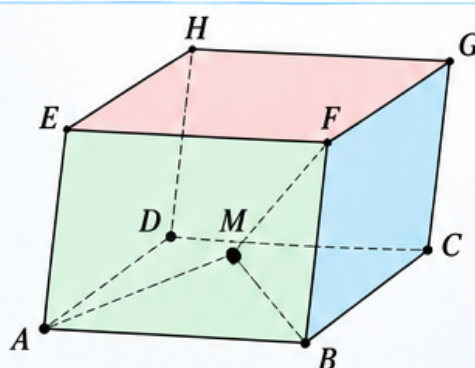
$$\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$$

$$\vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$$

Exemple 2 (d'après votre cours)

Dans le parallélépipède ci-contre, M est le
centre du rectangle $ABCD$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \end{cases}$$



Méthode

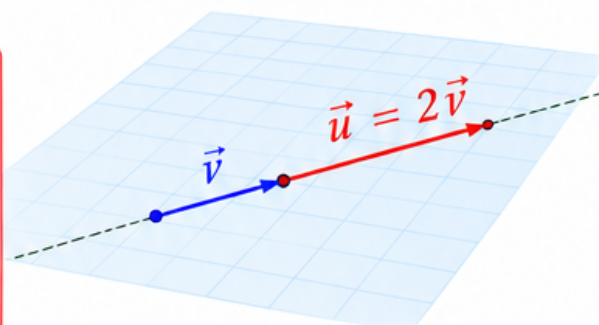
- 1 Choisir les vecteurs de référence appropriés.
- 2 Décomposer chaque vecteur comme somme de vecteurs plus simples à l'aide de la relation de Chasles.
- 3 Simplifier et exprimer sous la forme $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$.

5 Vecteurs colinéaires

Définition

Deux vecteurs **non nuls** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont
colinéaires lorsqu'ils ont la même
direction, c'est-à-dire qu'il existe
un réel k tel que :

$$\vec{u} = k \vec{v}$$



Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Remarque

Deux vecteurs colinéaires
sont soit de même sens
($k > 0$), soit de sens contraire
($k < 0$).

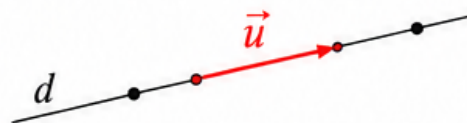
⚠ À ne pas confondre

Deux vecteurs colinéaires
ne sont pas forcément égaux !

6 Vecteur directeur d'une droite

Définition

On appelle **vecteur directeur** d'une droite d
tout vecteur **non nul** qui possède la même
direction que la droite d .



Exemple

La droite d admet $\vec{u}$ comme
vecteur directeur. Tout vecteur
non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi
un vecteur directeur de d .

Propriété

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul. La droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Propriété

Deux droites de l'espace de vecteurs
directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles
si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont
colinéaires.



7 Direction d'un plan de l'espace

Propriété

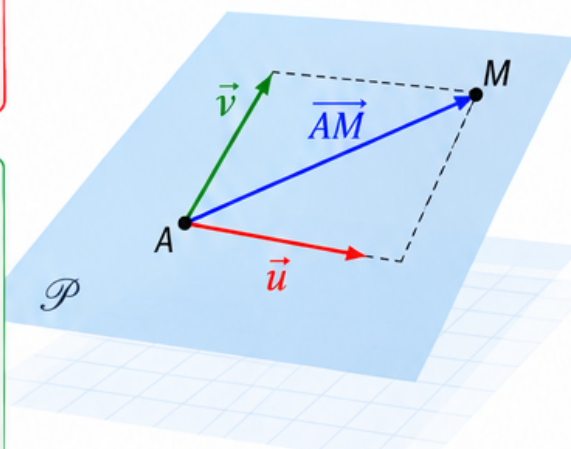
Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent la direction d'un plan.

Exemple

Soit un plan $\mathcal{P}$ dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Tout vecteur du plan $\mathcal{P}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\forall M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$



Tout point M du plan $\mathcal{P}$ s'écrit $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Remarques

- Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas unique : tout couple de vecteurs non colinéaires du plan convient.
- Dans ces conditions, le triplet $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan.

À retenir

Un plan de l'espace est totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

8 Caractérisation d'un plan de l'espace

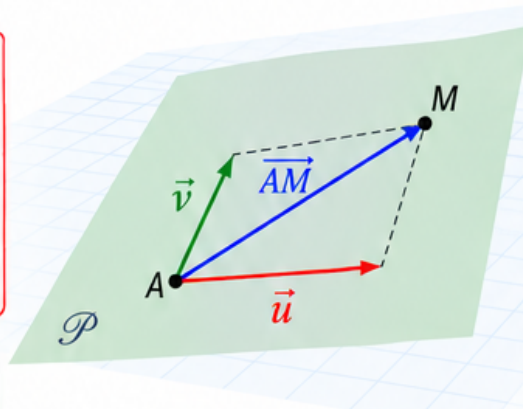
Propriété

Soit un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, est le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarque

Dans ces conditions, le triplet $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan.



Le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Démonstration (idée)

- Soit B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan (ABC) . Dans ce repère, tout point M de coordonnées (x, y) vérifie $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
- Réciproquement, si un point M vérifie $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, il appartient au plan (ABC) .

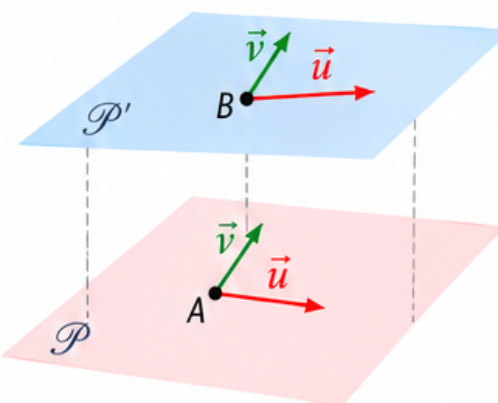
9 Deux plans parallèles

Propriété

Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Conséquence

Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que deux vecteurs non colinéaires de l'un des plans sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre.



Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont même direction et sont parallèles.

Remarque

Si deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires ont un point commun, ils sont confondus.

À retenir

Deux plans sont parallèles s'ils ont la même direction (c'est-à-dire si l'un possède deux vecteurs non colinéaires respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre).

10 Positions relatives de deux droites

Propriété

Deux droites de l'espace sont soit **coplanaires** (dans un même plan) soit non **coplanaires**.



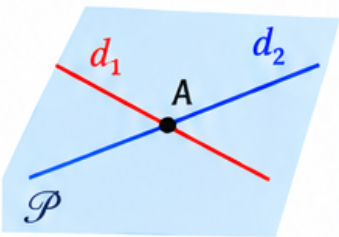
À retenir

Dans l'espace, deux droites peuvent être **sécantes**, **parallèles**, **confondues** ou non **coplanaires**.

Droites coplanaires (dans un même plan)

Droites sécantes

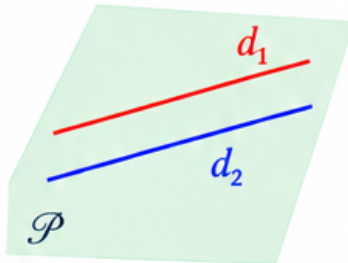
Elles ont un unique point commun.



d_1 et d_2 sont sécantes en A.

Droites parallèles

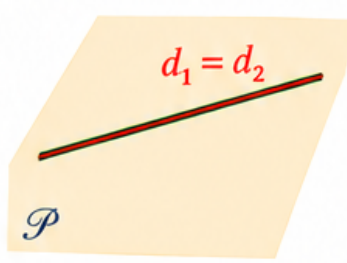
Elles n'ont aucun point commun et ont la même direction.



d_1 et d_2 sont parallèles.

Droites confondues

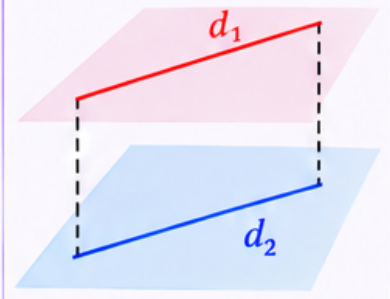
Elles ont une infinité de points communs.



d_1 et d_2 sont confondues.

Droites non coplanaires

Elles n'ont aucun point commun et ne sont pas dans un même plan.



d_1 et d_2 sont non coplanaires (on dit aussi « gauches »).

11 Positions relatives de deux plans

Propriété

Deux plans de l'espace sont soit **parallèles**, soit **sécants** (ils se coupent selon une droite).

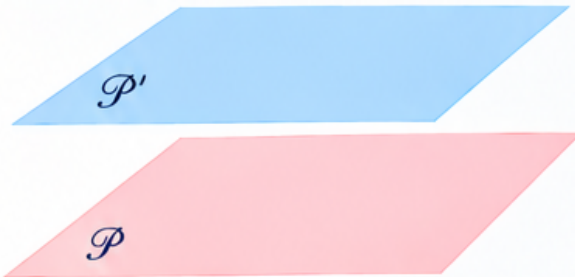


À retenir

- Deux plans parallèles n'ont aucun point commun.
- Deux plans sécants ont une infinité de points communs : leur intersection est une droite.

Plans parallèles

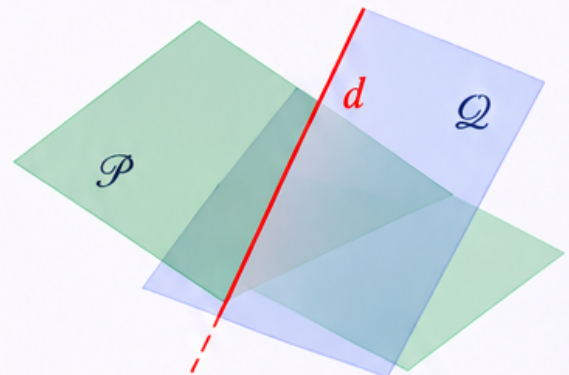
Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.



$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ n'ont aucun point commun et sont parallèles.

Plans sécants

Deux plans sécants se coupent selon une droite.



$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ se coupent suivant la droite d .



12 Vecteurs et parallélisme

Propriété

Deux droites (ou deux plans) sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

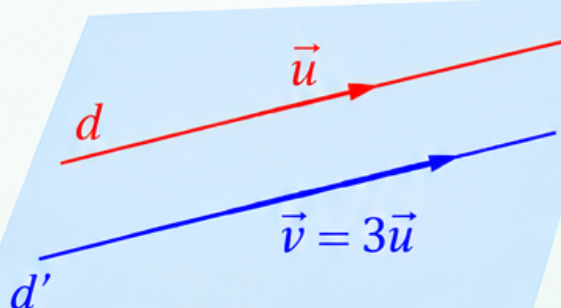


À retenir

- Deux droites sont parallèles $\Leftrightarrow$ leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Deux plans sont parallèles $\Leftrightarrow$ ils sont dirigés par deux vecteurs non colinéaires respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre plan.

Exemple 1 : droites parallèles

Soit deux droites d et d' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Si $\vec{v} = 3\vec{u}$, alors d et d' sont parallèles.



Exemple 2 : plans parallèles

Soit deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
Le plan $\mathcal{P}$ est dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Le plan $\mathcal{P}'$ est dirigé par les vecteurs $\vec{u}' = 2\vec{u}$ et $\vec{v}' = -\vec{v}$.
Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

13 Repérage dans l'espace

Définition

Un **repère** de l'espace est constitué :

- d'un point O , appelé origine ;
- de trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

On note ce repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Remarques

- Les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ définissent trois directions de l'espace, mutuellement non coplanaires.
- Tout point M de l'espace est repéré par un triplet de coordonnées $(x ; y ; z)$.
- Dans un repère orthonormé, on a $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux.



À retenir

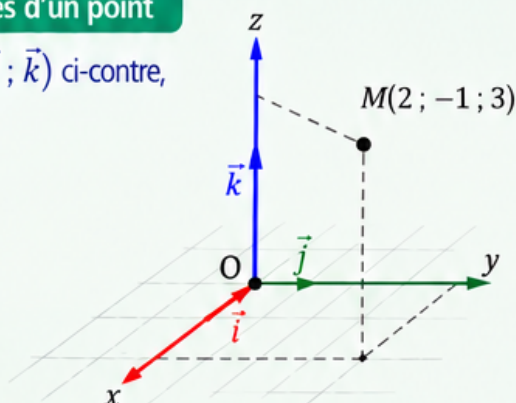
Dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$:

- tout point M est associé à un triplet de coordonnées $(x ; y ; z)$;
- si $\vec{OM} = (x ; y ; z)$, alors $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Exemple : coordonnées d'un point

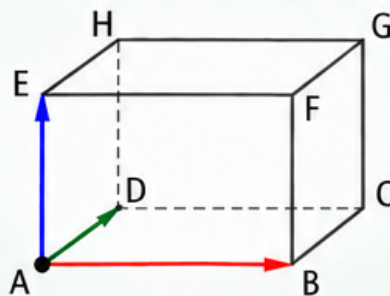
Dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ ci-contre, on a $M(2 ; -1 ; 3)$.

Ainsi,
 $\vec{OM} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.



Exemple : dans un parallélépipède rectangle

Dans le parallélépipède rectangle ci-dessous, on se place dans le repère $(A ; \vec{AB} ; \vec{AD} ; \vec{AE})$.



On a alors :

$A(0 ; 0 ; 0)$
 $B(1 ; 0 ; 0)$
 $D(0 ; 1 ; 0)$
 $E(0 ; 0 ; 1)$
 $C(1 ; 1 ; 0)$
 $G(1 ; 1 ; 1)$
 $H(0 ; 1 ; 1)$

14 Vecteurs coplanaires

Rappel : vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

Ils ont la même direction (éventuellement des sens opposés).

Deux vecteurs colinéaires sont toujours coplanaires.



À retenir

- Deux ou trois vecteurs sont **coplanaires** s'il existe deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que tout autre vecteur de la famille puisse s'écrire comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Autrement dit, trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$.
- Deux vecteurs non colinéaires déterminent un plan unique. Tout vecteur combinaison linéaire de ces deux vecteurs appartient à ce plan.

Exemple 1 : trois vecteurs coplanaires

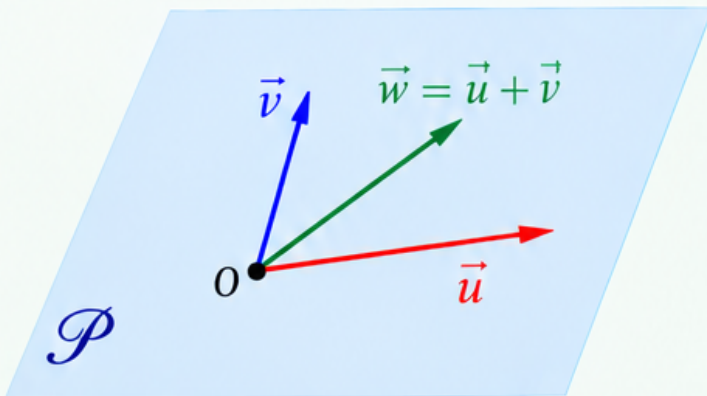
On considère les vecteurs $\vec{u}(2; 1; 0)$, $\vec{v}(-1; 2; 0)$ et $\vec{w}(1; 3; 0)$.

On montre que $\vec{w}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\begin{aligned} \text{En effet, } \vec{u} + \vec{v} &= (2; 1; 0) + (-1; 2; 0) \\ &= (2 - 1; 1 + 2; 0 + 0) \\ &= (1; 3; 0) = \vec{w}. \end{aligned}$$

Ainsi, les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.



Exemple 2 : trois vecteurs non coplanaires

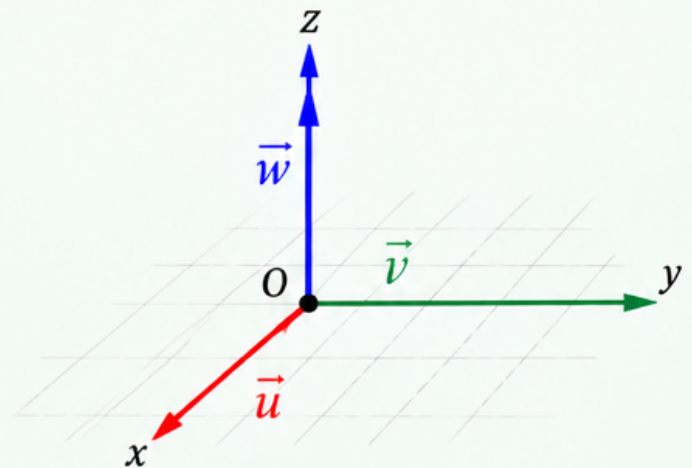
On considère les vecteurs $\vec{u}(1; 0; 0)$, $\vec{v}(0; 1; 0)$ et $\vec{w}(0; 0; 1)$.

Supposons qu'il existe des réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$.

$$\text{Alors } \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = (\alpha; \beta; 0) \text{ or } \vec{w} = (0; 0; 1).$$

On devrait donc avoir $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $0 = 1$, ce qui est impossible.

Ainsi, les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.



15 Calculs dans un repère de l'espace

Repère de l'espace

On se place dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
Tout point M de l'espace est associé à un triplet
de coordonnées $(x; y; z)$, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Coordonnées d'un vecteur

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

Coordonnées de la somme et de la différence

Soit $\vec{u}(x_1; y_1; z_1)$ et $\vec{v}(x_2; y_2; z_2)$ deux vecteurs.
On a :

$$\vec{u} + \vec{v}(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$$

$$\vec{u} - \vec{v}(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$$

Exemple

Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points
 $A(1; 2; -1)$, $B(4; -1; 3)$ et $C(0; 1; 2)$.

- Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
- On considère le vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
Déterminer ses coordonnées.

Correction

- $\overrightarrow{AB}(4 - 1; -1 - 2; 3 - (-1)) = (3; -3; 4)$
 $\overrightarrow{AC}(0 - 1; 1 - 2; 2 - (-1)) = (-1; -1; 3)$
- $I\left(\frac{1+4}{2}; \frac{2+(-1)}{2}; \frac{-1+3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$
- $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 2(3; -3; 4) - (-1; -1; 3)$
 $= (6; -6; 8) - (-1; -1; 3) = (7; -5; 5)$

À retenir

- Dans un repère de l'espace, un point est repéré par trois coordonnées.
- Un vecteur est déterminé par ses trois coordonnées.
- Les formules de calcul sont les mêmes que dans le plan, avec une troisième coordonnée.
- Si $M(x; y; z)$ alors $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Milieu d'un segment

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points.
Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

Coordonnées d'un multiple d'un vecteur

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ un vecteur et k un réel.
Les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ sont :

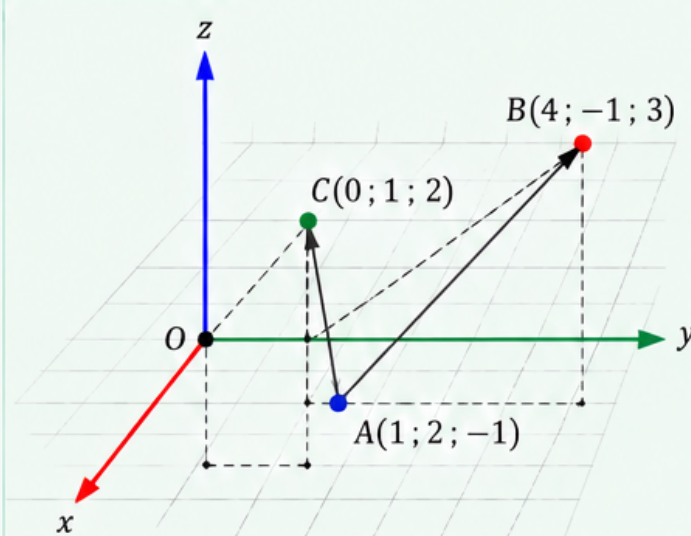
$$k\vec{u}(kx; ky; kz).$$

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$

Si $M(x; y; z)$ est un point de l'espace, alors :

$$\overrightarrow{OM}(x; y; z).$$

Représentation





16 Représentation paramétrique d'une droite

Définition

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul.

La droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que il existe un réel t vérifiant :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

On dit que ces équations sont une **représentation paramétrique** de la droite d .

Remarques

- Le réel t est un paramètre qui permet d'obtenir tous les points de la droite.
- Tout vecteur directeur non nul de d convient. Ainsi, si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d , alors $k\vec{u}$ avec $k \neq 0$ est aussi un vecteur directeur de d .
- Une droite de l'espace est entièrement déterminée par un point et un vecteur directeur non nul.



À retenir

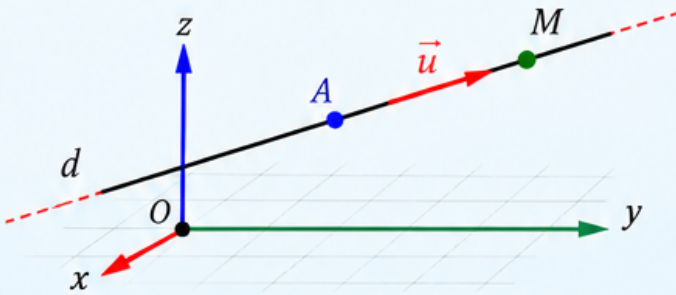
- Équations paramétriques d'une droite d passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$:

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- Tout point de la droite s'écrit : $M(t) = A + t\vec{u}$.
- Réciproquement, si un point M vérifie ces équations pour un certain réel t , alors M appartient à la droite d .

Représentation graphique

La droite d passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ est l'ensemble des points $A + t\vec{u}$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.



Forme vectorielle

La droite d peut aussi s'écrire sous la forme :

$$M(t) = A + t\vec{u} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $\vec{u}(a; b; c)$, alors

$$M(t)(x; y; z) = (x_A + ta; y_A + tb; z_A + tc).$$

Cette écriture est souvent pratique pour effectuer des calculs.

Exemple

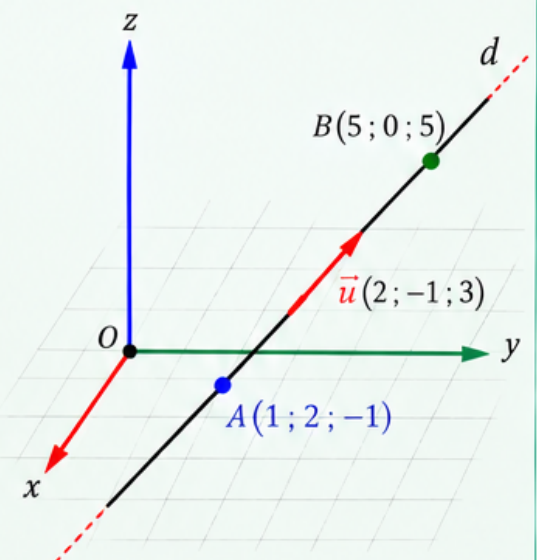
On considère la droite d passant par $A(1; 2; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$.

- Écrire une représentation paramétrique de la droite d .
- Déterminer les coordonnées du point M de la droite correspondant à $t = 2$.
- Montrer que le point $B(5; 0; 5)$ appartient à la droite d .

Correction

- Une représentation paramétrique de d est :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$
- Pour $t = 2$: $M(2)(1 + 2 \times 2; 2 - 2; -1 + 3 \times 2) = (5; 0; 5).$
- Les coordonnées de B vérifient les équations avec $t = 2$: $5 = 1 + 2 \times 2, 0 = 2 - 2, 5 = -1 + 3 \times 2.$ Donc $B(5; 0; 5)$ appartient à la droite d .

Représentation de l'exemple



17 Position relative de deux droites : méthode et exemples

Méthode

1. Écrire une représentation paramétrique de chaque droite.
2. Comparer les vecteurs directeurs :
 - s'ils sont colinéaires, les droites sont parallèles ou confondues ;
 - s'ils ne sont pas colinéaires, les droites sont sécantes ou non coplanaires.
3. Selon le cas, résoudre le système obtenu pour déterminer s'il existe un point commun.



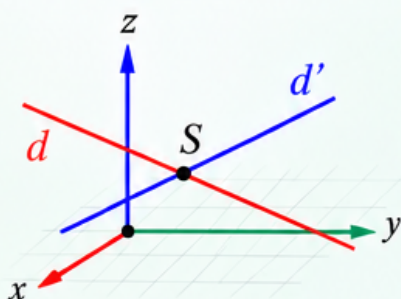
À retenir

Deux droites de l'espace sont :

- **sécantes** si elles se coupent en un point ;
- **parallèles** si elles sont distinctes et de vecteurs directeurs colinéaires ;
- **confondues** si elles sont parallèles et ont un point en commun ;
- **non coplanaires** (gauches) si elles ne sont pas parallèles et ne se coupent pas.

Cas 1 : droites sécantes

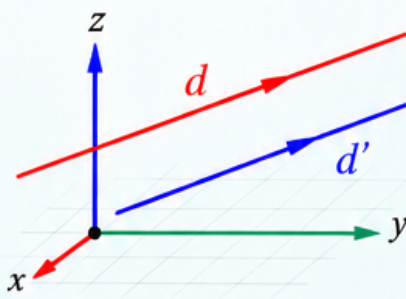
Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et le système admet une solution unique.



Les droites d et d' se coupent en un point S . Elles sont donc **sécantes**.

Cas 2 : droites parallèles ou confondues

Les vecteurs directeurs sont colinéaires.

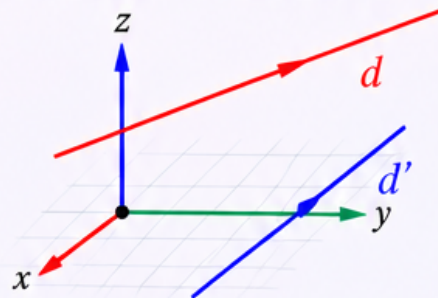


Deux cas sont possibles :

- soit les droites sont parallèles et distinctes ;
- soit elles sont confondues (même droite).

Cas 3 : droites non coplanaires (gauches)

Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et le système n'admet aucune solution.



Les droites d et d' ne se coupent pas et ne sont pas parallèles : elles sont **gauches** (non coplanaires).

Exemple 1

On considère les droites :

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad d' : \begin{cases} x = 3 - s \\ y = 1 + 2s \\ z = 1 + s \end{cases}$$

Les vecteurs directeurs $(2; 1; -1)$ et $(-1; 2; 1)$ ne sont pas colinéaires.

On résout le système :

$$\begin{cases} 1 + 2t = 3 - s \\ -1 + t = 1 + 2s \\ 3 - t = 1 + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t + s = 2 \\ t - 2s = 2 \\ -t - s = -2 \end{cases}$$

On obtient $t = 1$ et $s = 0$.

Le point d'intersection est $S(3; 0; 2)$.

Les droites sont **sécantes**.

Exemple 2

On considère les droites :

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases} \quad d' : \begin{cases} x = 3 + 4s \\ y = 0 \\ z = 1 - 2s \end{cases}$$

Les vecteurs directeurs $(2; 0; -1)$ et $(4; 0; -2)$ sont colinéaires ($\vec{u}' = 2\vec{u}$).

On vérifie s'il y a un point commun :

$$\begin{cases} 1 + 2t = 3 + 4s \\ 0 = 0 \\ 1 - t = 1 - 2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t - 2s = 1 \\ t = 2s \end{cases}$$

En remplaçant $t = 2s$ dans la première équation :

$$2 \times 2s - 2s = 1 \Rightarrow 2s = 1 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

On obtient $t = 1$ et $s = \frac{1}{2}$.

Le point d'intersection est $A(3; 0; 0)$.

Les droites sont donc **confondues**.

Exemple 3

On considère les droites :

$$d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad d' : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + s \\ z = 1 + s \end{cases}$$

Les vecteurs directeurs $(1; 0; 0)$ et $(0; 1; 1)$ ne sont pas colinéaires.

On résout le système :

$$\begin{cases} 1 + t = 0 \\ 0 = 1 + s \\ 1 = 1 + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ s = -1 \\ s = 0 \end{cases}$$

Contradiction sur s !

Le système n'admet aucune solution.

Les droites ne se coupent pas et ne sont pas parallèles. Elles sont donc **non coplanaires** (gauches).

Conseils

- Toujours commencer par comparer les vecteurs directeurs.
- Si les vecteurs directeurs sont colinéaires, vérifier l'existence d'un point commun pour distinguer droites parallèles et droites confondues.
- Si les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, résoudre le système. S'il n'a pas de solution, les droites sont gauches.