

✓ Correction – À toi de jouer !

Terminale
Spécialité maths

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les deux droites (d) et (d') définies par :

$$(d) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(d') : \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 2 - 2s \\ z = 3 + s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

1 Vecteurs directeurs

Pour la droite (d) : $\vec{u} = (2; 1; -1)$.

Pour la droite (d') : $\vec{v} = (1; -2; 1)$.

2 Les vecteurs ne sont pas colinéaires

On peut faire un produit en croix avec les coordonnées x et y :

$$2 \times (-2) = -4 \quad \text{et} \quad 1 \times 1 = 1.$$

Comme $-4 \neq 1$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

3 Position relative des droites

Les vecteurs directeurs n'étant pas colinéaires, on cherche un éventuel point d'intersection.

On résout le système :

$$\begin{cases} 1 + 2t = -1 + s & (1) \\ t = 2 - 2s & (2) \\ 1 - t = 3 + s & (3) \end{cases}$$

De (2) : $t = 2 - 2s$.

On remplace dans (1) :

$$1 + 2(2 - 2s) = -1 + s \Rightarrow 5 - 4s = -1 + s \Rightarrow 6 = 5s \Rightarrow s = \frac{6}{5}.$$

Alors $t = 2 - 2 \times \frac{6}{5} = -\frac{2}{5}$.

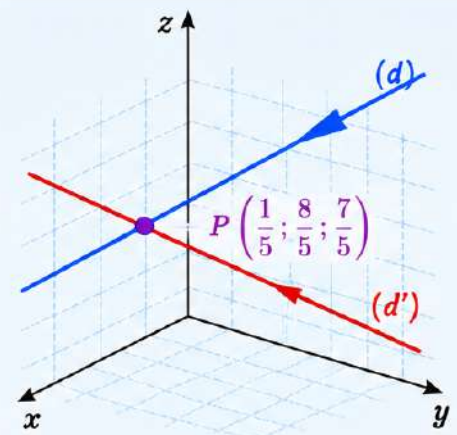
Vérification dans (3) : $1 - \left(-\frac{2}{5}\right) = 3 + \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{7}{5} = \frac{21}{5}$ (vrai).

Le système admet une solution unique : $t = -\frac{2}{5}$ et $s = \frac{6}{5}$.

4 Existence d'un plan contenant les deux droites

Les deux droites sont sécantes (elles admettent un point d'intersection).

Deux droites sécantes sont toujours coplanaires : il existe donc un plan contenant les deux droites.



Coordonnées du point d'intersection

$$\left. \begin{aligned} \text{Avec } t = -\frac{2}{5} \text{ dans } (d) : \\ x = 1 + 2t = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \\ y = t = -\frac{2}{5} \\ z = 1 - t = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} \end{aligned} \right\} P\left(\frac{1}{5}; \frac{8}{5}; \frac{7}{5}\right)$$



Conclusion

Les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en $P\left(\frac{1}{5}; \frac{8}{5}; \frac{7}{5}\right)$ et sont donc coplanaires (elles appartiennent à un même plan).

! Remarque

Dans l'espace, deux droites qui ne sont pas parallèles ne sont pas forcément sécantes : elles peuvent être droites gauches (non coplanaires).