



Exercice de synthèse 5

Combinatoire et dénombrement

Corrigé détaillé Livres sur une étagère

Permutations et contraintes

On dispose de 12 livres distincts : 5 de mathématiques, 4 de sciences et 3 de littérature.
On les range sur une même étagère. Deux rangements sont différents si l'ordre des livres est différent.



Rappels utiles

- Permutations de n éléments : $n!$
- Bloc de k éléments consécutifs : on considère le bloc comme un seul objet.
- Choix de k éléments parmi n : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Principe d'inclusion-exclusion.
- Méthode des intervalles (places libres).

1 Tous les rangements

On range les 12 livres distincts sur une étagère.
Tous les livres étant différents, le nombre de rangements possibles est le nombre de permutations de 12 éléments.

$$12! = 479\,001\,600.$$

Réponse

Nombre de rangements possibles :
 $12! = 479\,001\,600.$



2 Les livres de maths en bloc

Les 5 livres de mathématiques doivent être rangés consécutivement.
On considère le bloc $(M_1, \dots, M_5)$ comme un seul objet. On a donc 8 objets à ranger :

- le bloc des 5 livres de maths,
- les 4 livres de sciences,
- les 3 livres de littérature.

Ces 8 objets peuvent être arrangés de $8!$ façons et, à l'intérieur du bloc, les 5 livres de maths peuvent être permutés de $5!$ façons.

$$8! \times 5! = 4\,838\,400.$$

Réponse

Nombre de rangements possibles :
 $8! \times 5! = 4\,838\,400.$



Bloc de maths

3 Deux livres non voisins

On considère deux livres de mathématiques, par exemple M_1 et M_2 . On compte d'abord tous les rangements, puis ceux où M_1 et M_2 sont voisins, et on soustrait.

- Nombre total de rangements : $12!$.
- Rangements où M_1 et M_2 sont dans un bloc : on considère le bloc (M_1, M_2) comme un seul objet. On a donc 11 objets à arranger, et 2 ordres possibles à l'intérieur du bloc.

$$2 \times 11! = 79\,833\,600.$$

Par complémentaire, le nombre de rangements où M_1 et M_2 ne sont pas voisins est :

$$12! - 2 \times 11! = 399\,168\,000.$$

Réponse

Nombre de rangements possibles :
 $399\,168\,000.$

4 Trois catégories en blocs

Les 5 livres de maths doivent être consécutifs, les 4 livres de sciences consécutifs et les 3 livres de littérature consécutifs.

On considère donc 3 blocs :

- un bloc de 5 livres de maths,
- un bloc de 4 livres de sciences,
- un bloc de 3 livres de littérature.

Ces 3 blocs peuvent être arrangés de $3!$ façons et, à l'intérieur de chaque bloc, les livres peuvent être permutés.

$$3! \times 5! \times 4! \times 3! = 103\,680.$$

Réponse

Nombre de rangements possibles :
 $103\,680.$



Bloc de maths Bloc de sciences Bloc de littérature

5 Extrémités imposées

Le livre M_1 doit être tout à gauche et le livre L_3 tout à droite.

On fixe ces deux livres. Il reste 10 livres distincts à ranger au milieu, de $10!$ façons.

$$10! = 3\,628\,800.$$

Réponse

Nombre de rangements possibles :
 $10! = 3\,628\,800.$



6 Ordre relatif

On doit respecter l'ordre M_1, M_2, M_3 de gauche à droite (ils ne sont pas nécessairement consécutifs).

On place d'abord ces 3 livres, puis on remplit les 9 places restantes avec les 9 autres livres.

- Placement de M_1, M_2, M_3 : on choisit 3 places parmi 12 : $\binom{12}{3}$, et elles sont ensuite ordonnées de 1 façon dans l'ordre imposé.
- Les 9 autres livres peuvent être rangés de $9!$ façons.

$$\binom{12}{3} \times 9! = 22\,177\,280.$$

Réponse

Nombre de rangements possibles :
 $22\,177\,280.$

7 Choix de 8 livres

On choisit 8 livres parmi les 12, avec exactement 3 livres de mathématiques.

- On choisit 3 livres de maths parmi 5 : $\binom{5}{3}$.
- On choisit 5 livres parmi les 7 autres (4 de sciences et 3 de littérature) : $\binom{7}{5}$.

Les 8 livres choisis sont ensuite rangés de $8!$ façons.

$$\binom{5}{3} \times \binom{7}{5} \times 8! = 41\,472\,000.$$

Réponse

Nombre de rangements possibles :
 $41\,472\,000.$

8 Généralisation

On considère n livres distincts, dont p livres d'une même catégorie, qui doivent être rangés consécutivement.

On considère le bloc de p livres comme un seul objet. On a donc $n - p + 1$ objets à ranger : le bloc et les $n - p$ autres livres.

Le nombre de rangements possibles est donc :

$$(n - p + 1)! \times p!$$

Réponse

Formule générale :
 $(n - p + 1)! \times p!.$

