



Exercice de synthèse 6

Combinatoire et dénombrement

Corrigé détaillé Podium et classement

Permutations, arrangements et contraintes

Une compétition réunit 14 concurrents distincts, notés $C_1, C_2, \dots, C_{14}$.
On s'intéresse à différents classements et répartitions en groupes.



Rappels utiles

- Arrangements de p éléments parmi n :
 $A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$
- Permutations de n éléments : $n!$
- Choix de p éléments parmi n : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
- Répartition en groupes non nommés de même effectif : $\frac{n!}{(p!)^2 \times 2!}$ (pour $n = 2p$).

1 Podium de 3

On cherche le nombre de podiums de 3 concurrents (premier, deuxième et troisième) parmi les 14.

Il s'agit d'arrangements de 3 éléments parmi 14.

$$A_{14}^3 = 14 \times 13 \times 12 = 2\,184.$$



Réponse

Nombre de podiums possibles :
2 184.

2 Classement des 5 premiers

On classe les 5 premiers concurrents de la compétition (de la 1^{ère} à la 5^{ème} place).

Il s'agit d'arrangements de 5 éléments parmi 14.

$$A_{14}^5 = 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 = 240\,240.$$



Réponse

Nombre de classements possibles :
240 240.

3 Deux concurrents imposés

On fixe deux concurrents C_1 et C_2 .

On cherche les podiums de 3 où C_1 et C_2 sont tous les deux présents (à des places quelconques).

On choisit la place du troisième concurrent parmi les 12 restants : 12 possibilités. Les 3 concurrents peuvent ensuite être ordonnés de 3! façons.

$$12 \times 3! = 12 \times 6 = 72.$$



Réponse

Nombre de podiums possibles :
72.

4 Exactement un des deux

On cherche les podiums de 3 où exactement l'un des deux concurrents C_1 et C_2 est présent.

- Choix du concurrent présent : 2 façons.
- Choix des 2 autres concurrents parmi les 12 restants : $\binom{12}{2} = 66$ façons.
- Les 3 concurrents sont ensuite ordonnés de 3! façons.

$$2 \times \binom{12}{2} \times 3! = 2 \times 66 \times 6 = 792.$$



Réponse

Nombre de podiums possibles :
792.

5 Ordre relatif

On considère trois concurrents C_1, C_2 et C_3 .

On cherche les classements des 5 premiers où ces trois concurrents sont présents, avec la contrainte : C_1 est devant C_2 et C_2 est devant C_3 (donc C_1 avant C_2 avant C_3).

- On choisit les 2 autres concurrents parmi les 11 restants : $\binom{11}{2} = 55$.
- Les 5 concurrents sont ensuite placés de 5! façons.
- Parmi ces 5! classements, l'ordre relatif de C_1, C_2, C_3 doit être respecté : ils sont dans un ordre fixé, donc 1 seule façon.

$$\binom{11}{2} \times 5! = 55 \times 120 = 6\,600.$$

Réponse

Nombre de classements possibles :
6 600.

6 Choix de 6 finalistes

On choisit 6 finalistes parmi les 14, puis on les classe de la 1^{ère} à la 6^{ème} place.

- Choix des 6 finalistes : $\binom{14}{6}$.
- Classement de ces 6 finalistes : 6!.

$$\binom{14}{6} \times 6! = \frac{14!}{6!8!} \times 6! = \frac{14!}{8!} = 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 21\,621\,120.$$



Réponse

Nombre de classements possibles :
21 621 120.

7 Deux groupes de 7

On partage les 14 concurrents en deux groupes de 7, les groupes n'étant pas nommés.

On commence par former un groupe de 7 : $\binom{14}{7}$ façons. L'autre groupe est automatiquement déterminé. Comme les groupes ne sont pas nommés, on divise par 2 (pour éviter de compter deux fois la même répartition).

$$\frac{1}{2} \binom{14}{7} = \frac{1}{2} \times 3\,432 = 1\,716.$$



Réponse

Nombre de répartitions possibles :
1 716.

8 Généralisation

On considère n concurrents distincts que l'on partage en deux groupes de même effectif, soit $p = \frac{n}{2}$ concurrents dans chaque groupe (on suppose n pair).

On forme un groupe de p : $\binom{n}{p}$ façons. L'autre groupe est déterminé.

Les groupes ne sont pas nommés, on divise par 2.

$$\frac{1}{2} \binom{n}{p} = \frac{n!}{(p!)^2 \times 2!} \quad (\text{avec } n = 2p).$$

