



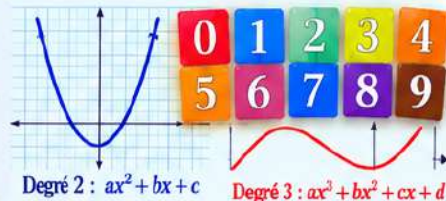
Exercice de synthèse 9

Corrigé détaillé

Polynômes à coefficients chiffres

Dénombrements et racines imposées

On considère les polynômes à coefficients entiers de la forme $ax^2 + bx + c$ (avec a non nul) et, plus généralement, les polynômes de degré 3 de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (avec a non nul), où les coefficients sont des chiffres de 0 à 9.



A Polynômes du second degré

On considère les polynômes de la forme $ax^2 + bx + c$ (a non nul), où a, b et c sont des chiffres de 0 à 9.

1 Nombre total de polynômes

- $a \in \{1, \dots, 9\}$: 9 choix (a non nul).
- $b \in \{0, \dots, 9\}$: 10 choix.
- $c \in \{0, \dots, 9\}$: 10 choix.

Nombre de polynômes : $9 \times 10 \times 10 = 900$.

2 Racine 0

0 est racine $\Leftrightarrow c = 0$.

- a : 9 choix ; b : 10 choix ; $c = 0$.

Nombre de polynômes : $9 \times 10 = 90$.

3 Racine -1

-1 est racine $\Leftrightarrow P(-1) = a - b + c = 0 \Leftrightarrow c = b - a$.

- a : 9 choix ; b : 10 choix.
- Pour chaque couple (a, b) , $c = b - a$ appartient toujours à $\{0, \dots, 9\}$ car $0 \leq b - a \leq 9$.

Nombre de polynômes : $9 \times 10 = 90$.

4 Racine 1 (supplémentaire)

1 est racine $\Leftrightarrow P(1) = a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = 10 - (a + b)$.

- $a \in \{1, \dots, 9\}$ et $b \in \{0, \dots, 9\}$.
- Il faut $0 \leq 10 - (a + b) \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq a + b \leq 10$.
- Nombre de couples (a, b) : $10 + 9 + \dots + 1 = 55$.

Nombre de polynômes : 55.

5 Deux racines imposées (0 et 1)

Avoir 0 et 1 comme racines $\Leftrightarrow P(x) = ax(x-1) = a(x^2 - x)$.

- $a \in \{1, \dots, 9\}$: 9 choix. $b = -a$, $c = 0$.

Nombre de polynômes : 9.

6 Racine double (discriminant nul)

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

Donc ac doit être un carré parfait, avec $a \in \{1, \dots, 9\}$.

Pour chaque a , comptons les couples (b, c) tels que $b^2 = 4ac$.

- Si $a = 1$: $c \in \{0, 1\}$ (2 couples).
- Si $a = 4$: $c \in \{0, 1\}$ (2 couples).
- Si $a \in \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$: seulement $c = 0$ (1 couple).
- Total : $7 \times 1 + 2 + 2 = 11$.

Nombre de polynômes : 11.

B Polynômes du troisième degré

On considère les polynômes de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a non nul), où a, b, c et d sont des chiffres de 0 à 9.

1 Nombre total de polynômes

- a : 9 choix ; b : 10 choix ; c : 10 choix ; d : 10 choix.

Nombre de polynômes : $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9\,000$.

2 Racine 0

0 est racine $\Leftrightarrow d = 0$.

- a : 9 choix ; b, c : 10 choix ; $d = 0$.

Nombre de polynômes : $9 \times 10 \times 10 = 900$.

3 Racine -1

-1 est racine $\Leftrightarrow P(-1) = -a + b - c + d = 0 \Leftrightarrow d = a - b + c$.

- Pour tout (a, b, c) , on a $0 \leq a - b + c \leq 9$, donc $d \in \{0, \dots, 9\}$.
- a : 9 choix ; b, c : 10 choix.

Nombre de polynômes : $9 \times 10 \times 10 = 900$.

4 Racine 1

- 1 est racine $\Leftrightarrow P(1) = a + b + c + d = 0 \Leftrightarrow d = 10 - (a + b + c)$.
- Il faut $1 \leq a + b + c \leq 10$.
- Nombre de triplets (a, b, c) :

Somme s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre	1	3	6	10	15	19	15	10	6	3

Nombre total : 88.

5 Deux racines imposées (0 et 1)

Avoir 0 et 1 comme racines $\Leftrightarrow P(x) = ax(x-1)(x-r) = a(x^3 - (1+r)x^2 + rx)$.

- $a \in \{1, \dots, 9\}$ (9 choix), $r \in \{0, \dots, 9\}$ (10 choix).
- Alors $b = -a(1+r)$, $c = ar$, $d = 0$, qui sont bien des chiffres.

Nombre de polynômes : $9 \times 10 = 90$.

6 Trois racines imposées (0, 1 et -1)

$P(x) = ax(x-1)(x+1) = a(x^3 - x) = ax^3 - ax$.

- $a \in \{1, \dots, 9\}$: 9 choix.

Nombre de polynômes : 9.

7 Racine double en 0

Avoir 0 comme racine double $\Leftrightarrow P(x) = x^2(ax+b)$: donc $d = 0$ et $c = 0$.

- a : 9 choix ; b : 10 choix.

Nombre de polynômes : $9 \times 10 = 90$.

8 Racines 0 et -1 (avec multiplicités)

0 racine double et -1 racine simple $\Leftrightarrow P(x) = ax^2(x+1) = a(x^3 + x^2)$.

- $a \in \{1, \dots, 9\}$: 9 choix.

Nombre de polynômes : 9.



Rappels utiles

- Les coefficients sont des chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- a non nul pour le degré 2 et 3.
- r est racine de P si et seulement si $P(r) = 0$.
- Pour un polynôme de degré 2 : $P(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$.
- Pour un polynôme de degré 3 : $P(x) = a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$.

Bilan des résultats

Question	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8
Nombre	900	90	90	55	9	11	9 000	900	900	88	90	9	90	9