

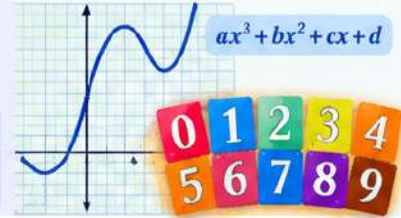


Exercice de synthèse 9

Combinatoire et dénombrement

Polynômes à coefficients chiffres Dénombrements et racines imposées

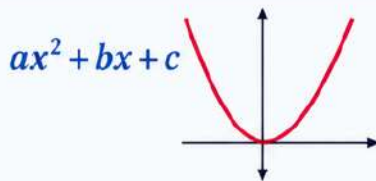
On considère les polynômes à coefficients entiers de la forme $ax^2 + bx + c$ (avec a non nul) et, plus généralement, les polynômes de degré 3 de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (avec a non nul).



A Polynômes du second degré

On considère les polynômes du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ (avec a non nul), où les coefficients a , b et c sont des chiffres de 0 à 9 (entiers compris entre 0 et 9).

- 1 Nombre total de polynômes**
Combien de polynômes peut-on former si l'on souhaite que les coefficients a , b et c soient des chiffres ?
- 2 Racine 0**
Parmi les polynômes précédents, combien admettent 0 comme racine ?
- 3 Racine -1**
Combien de polynômes admettent -1 comme racine ?
- 4 Racine 1 (question supplémentaire)**
Combien de polynômes admettent 1 comme racine ?
- 5 Deux racines imposées (question supplémentaire)**
Combien de polynômes admettent 0 et 1 comme racines ?
- 6 Discriminant nul (question supplémentaire)**
Combien de polynômes ont une racine double (c'est-à-dire un discriminant nul) ?

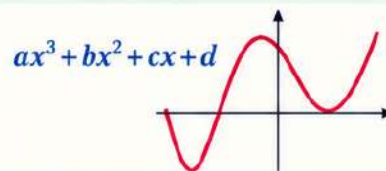


Exemple :
avec $a = 2$, $b = 5$, $c = 0$
on obtient $2x^2 + 5x$.
Ce polynôme admet 0 comme racine.

B Polynômes du troisième degré

On considère les polynômes du troisième degré de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (avec a non nul), où les coefficients a , b , c et d sont des chiffres de 0 à 9 (entiers compris entre 0 et 9).

- 1 Nombre total de polynômes**
Combien de polynômes peut-on former ?
- 2 Racine 0**
Combien de ces polynômes admettent 0 comme racine ?
- 3 Racine -1**
Combien de ces polynômes admettent -1 comme racine ?
- 4 Racine 1**
Combien de ces polynômes admettent 1 comme racine ?
- 5 Deux racines imposées**
Combien de polynômes admettent 0 et 1 comme racines ?
- 6 Trois racines imposées**
Combien de polynômes admettent 0, 1 et -1 comme racines ?
- 7 Racine double en 0 (question supplémentaire)**
Combien de polynômes ont 0 comme racine double ?
- 8 Racines 0 et -1 (avec multiplicités)**
Combien de polynômes admettent 0 comme racine double et -1 comme racine simple ?



Exemple :
avec $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$, $d = 2$
on obtient $x^3 - 3x + 2$.
Ce polynôme admet 1 pour racine et 2 pour racine.



Rappels utiles

- Les coefficients sont des chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Le coefficient a du terme dominant est non nul.
- Un nombre r est racine de P si et seulement si $P(r) = 0$.
- Pour un degré 2 : $P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.
- Pour un degré 3 : $P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$.
- Le nombre de choix pour un coefficient non nul est 9 (1 à 9).