



Exercice de synthèse 8

Combinatoire et dénombrement

Corrigé détaillé Répartition d'objets dans des boîtes

On dispose de 10 objets distincts, que l'on note 1, 2, ..., 10.
On les répartit dans 4 boîtes distinctes A, B, C et D.



Rappels utiles

- Nombre d'arrangements de p objets parmi n ($p \leq n$) :
 $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
- Principe d'inclusion-exclusion :
 $|A \cup B \cup C \cup D| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$
- Ici, les objets sont distincts et les boîtes sont distinctes.

1 Boîtes éventuellement vides

Chaque objet (parmi les 10) peut être dans l'une des 4 boîtes, indépendamment des autres.

Donc 4 choix pour chaque objet.

Nombre de répartitions :
 $4^{10} = 1\,048\,576$.



2 Aucune boîte vide

On commence par choisir 1 objet pour chaque boîte : $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!}$.
Il reste 6 objets à répartir librement dans les 4 boîtes : 4^6 .

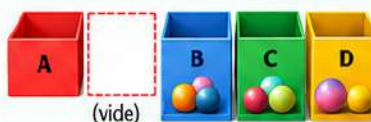
Nombre de répartitions :
 $\frac{10!}{6!} \times 4^6 = 151\,200$.



3 Exactement une boîte vide

On choisit la boîte qui est vide : 4 choix.
On répartit les 10 objets dans les 3 autres boîtes, aucune n'étant vide :
 $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!}$ façons,
puis 3^7 façons pour les 7 objets restants.

Nombre de répartitions :
 $4 \times \frac{10!}{7!} \times 3^7 = 604\,800$.



4 Première boîte : 3 objets

On choisit les 3 objets dans la boîte A :
 $\binom{10}{3} = 120$.
On répartit les 7 autres objets librement dans les 3 autres boîtes : 3^7 .

Nombre de répartitions :
 $\binom{10}{3} \times 3^7 = 262\,440$.



5 Deux objets ensemble

On suppose que les objets 1 et 2 sont dans la même boîte.

On considère le couple {1,2} comme un seul objet : il y a alors 9 objets à répartir dans 4 boîtes.

Nombre de répartitions :
 $4^9 = 262\,144$.



6 Deux objets séparés

Nombre total de répartitions : 4^{10} .

Nombre de répartitions où 1 et 2 sont ensemble : 4^9 .

Donc, par complémentarité :

$$4^{10} - 4^9 = 4^9(4-1) = 3 \times 4^9.$$

Nombre de répartitions :
 $3 \times 4^9 = 786\,432$.



7 Au moins deux par boîte

Comme $10 \geq 2 \times 4$, c'est possible.
On commence par donner 2 objets dans chaque boîte :

$$A_{10}^8 = \frac{10!}{(10-8)!} = \frac{10!}{2!}.$$

Il reste 2 objets à répartir librement dans les 4 boîtes : 4^2 .

Nombre de répartitions :
 $\frac{10!}{2!} \times 4^2 = 7\,257\,600$.



8 Généralisation

On dispose de n objets distincts ($n \geq 4$) à répartir dans 4 boîtes A, B, C et D.

On note $N(n)$ le nombre de répartitions telles qu'aucune boîte ne soit vide.

Par inclusion-exclusion :

$$N(n) = 4^n - 4 \binom{3}{1}^n + 6 \binom{2}{1}^n - 4 \binom{1}{1}^n$$

$$\text{soit } N(n) = 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4.$$



Bilan des résultats (pour $n = 10$)

1. Éventuellement vides	2. Aucune vide	3. Une vide	4. A : 3 objets	5. 1 et 2 ensemble	6. 1 et 2 séparés	7. ≥ 2 par boîte
1 048 576	151 200	604 800	262 440	262 144	786 432	7 257 600

8. Généralisation

$$N(n) = 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4.$$

