



Exercice de synthèse 8

Combinatoire et dénombrement

Répartition d'objets dans des boîtes

8 questions pour s'entraîner et progresser

On dispose de 10 objets distincts, que l'on note 1, 2, ..., 10.
On les répartit dans 4 boîtes distinctes, que l'on note A, B, C et D.



Objectifs

- ✓ Répartitions d'objets distincts
- ✓ Contraintes sur le nombre d'objets
- ✓ Objets imposés ensemble ou séparés
- ✓ Inclusion-exclusion
- ✓ Généralisation



1 Boîtes éventuellement vides

On répartit les 10 objets dans les 4 boîtes A, B, C et D, éventuellement vides.

Combien de répartitions différentes peut-on obtenir ?



2 Aucune boîte vide

On répartit les 10 objets dans les 4 boîtes A, B, C et D, aucune boîte n'étant vide.

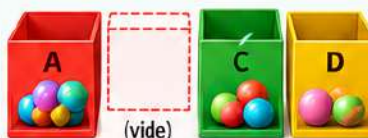
Combien de répartitions différentes peut-on obtenir ?



3 Exactement une boîte vide

On répartit les 10 objets dans les 4 boîtes A, B, C et D, exactement une boîte étant vide.

Combien de répartitions différentes peut-on obtenir ?

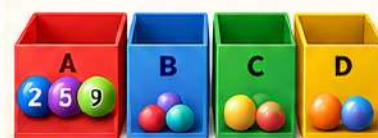


4 Première boîte : 3 objets

On répartit les 10 objets dans les 4 boîtes A, B, C et D.

On impose que la boîte A contienne exactement 3 objets.

Combien de répartitions différentes peut-on obtenir ?



5 Deux objets ensemble

On répartit les 10 objets dans les 4 boîtes A, B, C et D.

On impose que les deux objets 1 et 2 soient dans la même boîte.

Combien de répartitions différentes peut-on obtenir ?



6 Deux objets séparés

On répartit les 10 objets dans les 4 boîtes A, B, C et D.

On impose que les deux objets 1 et 2 soient dans deux boîtes différentes.

Combien de répartitions différentes peut-on obtenir ?



7 Au moins deux par boîte

On répartit les 10 objets dans les 4 boîtes A, B, C et D.

On impose que chaque boîte contienne au moins deux objets. Est-ce possible ?

Si oui, combien de répartitions différentes peut-on obtenir ?



8 Généralisation

On dispose de n objets distincts ($n \geq 4$) que l'on répartit dans 4 boîtes distinctes A, B, C et D. On note $N(n)$ le nombre de répartitions telles qu'aucune boîte ne soit vide.

À l'aide du principe d'inclusion-exclusion, donner une formule générale de $N(n)$, valable pour tout $n \geq 4$.

