



Exercice de synthèse 4

Combinatoire et dénombrement

Corrigé détaillé Table ronde

Douze personnes distinctes s'installent autour d'une table ronde.
Deux placements obtenus l'un de l'autre par une rotation sont considérés comme identiques.

+ Rappels utiles

- Placements circulaires de n personnes : $(n-1)!$
- Bloc de k personnes consécutives : on considère le bloc comme une seule personne.
- Coefficient binomial : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

1 Tous les placements

On fixe une personne pour supprimer la rotation. On place ensuite les 11 autres sur les 11 places restantes.

$$(12-1)! = 11!$$



Réponse

Nombre de placements possibles :
 $11! = 39\,916\,800$.

2 A et B voisins

On considère A et B comme un bloc. Ce bloc et les 10 autres personnes sont 11 objets à placer autour de la table : $(11-1)! = 10!$ façons.

À l'intérieur du bloc, A et B peuvent être dans 2 ordres : AB ou BA.

$$2 \times (11-1)! = 2 \times 10! = 7\,257\,600.$$



Réponse

Nombre de placements possibles :
 $2 \times 10! = 7\,257\,600$.

3 A et B non voisins

On utilise le complémentaire.

Nombre total de placements : $11!$

Nombre avec A et B voisins : $2 \times 10!$

Donc le nombre avec A et B non voisins est :

$$11! - 2 \times 10! = 9 \times 10! = 32\,659\,200.$$



Réponse

Nombre de placements possibles :
 $9 \times 10! = 32\,659\,200$.

4 A, B et C consécutives

On considère A, B et C comme un bloc de 3 personnes. Ce bloc et les 9 autres personnes sont 10 objets à placer : $(10-1)! = 9!$ façons.

À l'intérieur du bloc, A, B et C peuvent être arrangées de $3!$ façons.

$$3! \times (10-1)! = 3! \times 9! = 2\,177\,280.$$



Réponse

Nombre de placements possibles :
 $3! \times 9! = 2\,177\,280$.

5 A entre B et C

A doit être placée entre B et C. On considère le bloc (B, A, C) ou (C, A, B), soit 2 arrangements possibles.

Ce bloc et les 9 autres personnes sont 10 objets à placer autour de la table : $(10-1)! = 9!$ façons.

$$2 \times (10-1)! = 2 \times 9! = 725\,760.$$



Réponse

Nombre de placements possibles :
 $2 \times 9! = 725\,760$.

6 Deux groupes alternés

On a deux groupes de trois personnes (3 personnes d'un premier groupe et 3 d'un second). On impose l'alternance entre les deux groupes autour de la table.

On fixe l'ordre des 3 personnes du premier groupe : $(3-1)! = 2!$ façons. Les 3 personnes du second groupe sont ensuite placées dans les 3 places restantes : $3!$ façons.

$$2! \times 3! = 2 \times 6 = 12.$$



Réponse

Nombre de placements possibles :
12.

7 Quatre personnes consécutives

On considère 4 personnes données comme un bloc. Ce bloc et les 8 autres personnes sont 9 objets à placer : $(9-1)! = 8!$ façons.

À l'intérieur du bloc, les 4 personnes peuvent être arrangées de $4!$ façons.

$$4! \times (9-1)! = 4! \times 8! = 967\,680.$$



Réponse

Nombre de placements possibles :
 $4! \times 8! = 967\,680$.

8 Généralisation

On considère n personnes distinctes autour d'une table ronde.

Deux personnes données voisines :

- On considère un bloc de 2 personnes.
- Ce bloc et les $n-2$ autres personnes sont $n-1$ objets à placer : $(n-2)!$ façons.
- Les deux personnes peuvent être dans 2 ordres.

$$2 \times (n-2)!$$

Remarque :

- Nombre total de placements : $(n-1)!$.
- Nombre de placements avec deux personnes données non voisines : $(n-1)! - 2 \times (n-2)! = (n-3) \times (n-2)!$.
- Formellement, avec k personnes consécutives : $k! \times (n-k)!$.