



Vecteurs, droites et plans de l'espace

Fiche d'exercices #10

Corrigé

Énoncé

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constituée de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-contre. Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB = 1$.

On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

On se place dans le repère $(O; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OS})$.

On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu de $[SO]$.

a. Déterminer les coordonnées du point K . En déduire que les points B, I et K sont alignés.

On admet que, par symétrie, le point L défini par la relation $\overrightarrow{SL} = \frac{1}{3} \overrightarrow{SA}$ est aligné avec C et I .

On admet que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

b. Justifier que B, C, K et L sont coplanaires. Montrer alors que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

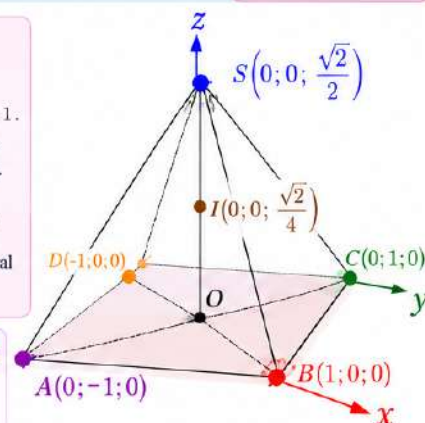
D'après Baccalauréat Amérique du Nord 2016

Repère et données utiles

- Repère : $(O; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OS})$.
- Base carrée $ABCD$, centre O , avec $OB = 1$.
- Tous les triangles latéraux sont équilatéraux donc toutes les arêtes ont la même longueur.
- Comme $OB = 1$, on a également $SA = SB = SC = SD = 1$ et la hauteur $SO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1).

Coordonnées des points du repère

- $O(0; 0; 0)$
- $B(1; 0; 0)$
- $C(0; 1; 0)$
- $S(0; 0; \frac{\sqrt{2}}{2})$
- $D(-1; 0; 0)$
- $A(0; -1; 0)$



1 Coordonnées du point K

On a $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{SD}$ donc $K = S + \frac{1}{3} (D - S)$.

Avec $S(0; 0; \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $D(-1; 0; 0)$:

$$K = \begin{pmatrix} 0; 0; \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}; 0; \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } K \left(-\frac{1}{3}; 0; \frac{\sqrt{2}}{3} \right).$$

2 Alignement de B, I et K

Le point I est le milieu de $[SO]$ donc

$$I \left(0; 0; \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

$$\overrightarrow{BI} = \begin{pmatrix} -1; 0; \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BK} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}; 0; \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3} \overrightarrow{BI}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires, donc les points B, I et K sont alignés.

3 Le point L et la coplanarité de B, C, K, L

On admet que $L \left(0; -\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3} \right)$ (aligné avec C et I).

On considère les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BL}$:

$$\overrightarrow{BK} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}; 0; \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BL} = \begin{pmatrix} -1; -\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

Les points B, C, K et L sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BL}$ ne sont pas colinéaires.

Les rapports des coordonnées ne sont pas tous égaux, donc $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BL}$ ne sont pas colinéaires.

Les points B, C, K et L sont donc coplanaires.

4 Parallélisme des droites (AD) et (KL)

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (-1; 1; 0).$$

$$\overrightarrow{KL} = L - K = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; 0 \right).$$

$$\text{On constate que } \overrightarrow{KL} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AD}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires, donc les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

Conclusion

- Les points B, C, K et L sont coplanaires.
- Les droites (AD) et (KL) sont parallèles.