



Vecteurs, droites et plans de l'espace

Fiche d'exercices #11

Corrigé

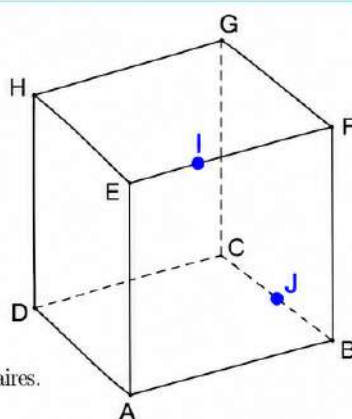
Énoncé

$ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.

Le point I est le milieu du segment $[EF]$.

Le point J est le milieu du segment $[BC]$.

L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.



- Donner les coordonnées de A , G , I et J dans ce repère.
- Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

1 Coordonnées de A , G , I et J

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, on a :

A	$(0; 0; 0)$	E	$(0; 0; 1)$
B	$(1; 0; 0)$	F	$(1; 0; 1)$
C	$(1; 1; 0)$	G	$(1; 1; 1)$
D	$(0; 1; 0)$	H	$(0; 1; 1)$

- A est l'origine du repère : $A(0; 0; 0)$.
- $G(1; 1; 1)$ (sommet opposé à A).

I est le milieu de $[EF]$:

$$I\left(\frac{0+1}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right).$$

J est le milieu de $[BC]$:

$$J\left(\frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{0+0}{2}\right) = \left(1; \frac{1}{2}; 0\right).$$

2 Démonstration de la coplanarité de $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$

a) Coordonnées des vecteurs

- $\overrightarrow{IJ}$: $\overrightarrow{IJ} = J - I = \left(1 - \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - 0; 0 - 1\right)$
 $\overrightarrow{IJ} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$
- $\overrightarrow{AE}$: $\overrightarrow{AE} = E - A = (0 - 0; 0 - 0; 1 - 0)$
 $\overrightarrow{AE} = (0; 0; 1)$
- $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AC} = C - A = (1 - 0; 1 - 0; 0 - 0)$
 $\overrightarrow{AC} = (1; 1; 0)$

b) Expression de $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$

On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\overrightarrow{IJ} = \alpha \overrightarrow{AE} + \beta \overrightarrow{AC}.$$

Cela donne, en coordonnées :

$$\alpha(0; 0; 1) + \beta(1; 1; 0) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$$

$$\text{c'est-à-dire } \begin{cases} 0\alpha + 1\beta = \frac{1}{2} \\ 0\alpha + 1\beta = \frac{1}{2} \\ 1\alpha + 0\beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{2} \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}.$$

c) Conclusion

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc coplanaires.