

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Fiche d'exercices #12

Corrigé

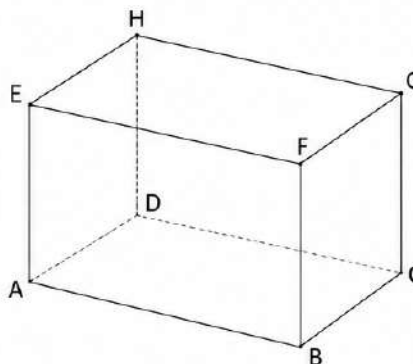
Énoncé

Dans le pavé droit $ABCDEFGH$, on pose :

- I milieu du segment $[FG]$,
- J milieu du segment $[GH]$,
- M centre de la face $ADHE$,
- N centre de la face $ABFE$.

On munit l'espace du repère $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$

- 1 Calculer les coordonnées des points I , J , M et N .
- 2 Démontrer que $IJMN$ est un parallélogramme.
- 3 Démontrer que la droite (IN) est parallèle à la droite (AG) .



Pavé droit $ABCDEFGH$

Repère et coordonnées utiles

- Repère : $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont mutuellement perpendiculaires et de même norme que les arêtes du pavé droit (ici de longueur 1).
- Pour tout point $M(x ; y ; z)$, on a $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AE}$.

Rappels utiles

- Milieu de $[AB]$: $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- Centre d'une face : milieu de la diagonale de cette face.

1 Coordonnées des points I , J , M et N

- Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$ et comme le pavé est de dimensions 1 :

$$\begin{array}{lll} A(0; 0; 0) & B(1; 0; 0) & D(0; 1; 0) \\ E(0; 0; 1) & C(1; 1; 0) & F(1; 0; 1) \\ H(0; 1; 1) & G(1; 1; 1) & \end{array}$$

- I milieu de $[FG]$: $I\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$ • $J\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$

- M centre de la face $ADHE$: $M\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

- N centre de la face $ABFE$: $N\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$

2 $IJMN$ est un parallélogramme

- On calcule les coordonnées des vecteurs :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ} &= J - I = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) \\ \overrightarrow{MN} &= N - M = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right) = -\overrightarrow{IJ} \\ \overrightarrow{IN} &= N - I = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \\ \overrightarrow{JM} &= M - J = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) = \overrightarrow{IN} \end{aligned}$$

- On a $\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{JM}$.
- Les côtés opposés sont parallèles et de même longueur, donc $IJMN$ est un parallélogramme.

Le quadrilatère $IJMN$ est un parallélogramme.

3 Parallélisme de (IN) et (AG)

- On calcule le vecteur $\overrightarrow{AG}$:

$$\overrightarrow{AG} = G - A = (1; 1; 1).$$

- À partir des coordonnées de I et N :

$$\overrightarrow{IN} = N - I = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

- On constate que $\overrightarrow{IN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires, donc les droites (IN) et (AG) sont parallèles.