



Vecteurs, droites et plans de l'espace

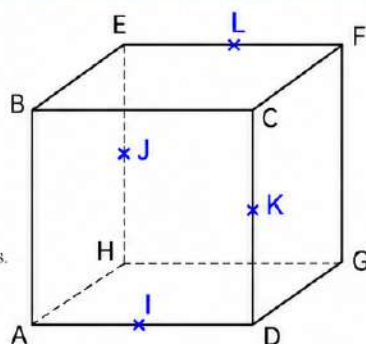
Fiche d'exercices #13

Corrigé

Énoncé

On considère le cube $ABCDEFGH$ et les points :

- I milieu du côté $[AD]$,
- J milieu du côté $[EH]$,
- K milieu du côté $[CD]$,
- L milieu du côté $[EF]$.



- 1 Montrer par la méthode des vecteurs (avec la relation de Chasles) que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.
- 2 Dans le repère $(A; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AH}; \overrightarrow{AB})$, déterminer les coordonnées des 12 points présents.
- 3 Déterminer les équations paramétriques des droites (IL) et (JK) .
- 4 Les droites (IL) et (JK) sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?

2 Coordonnées des 12 points

- Dans le repère $(A; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AH}; \overrightarrow{AB})$, A est l'origine et le cube est de côté 1.

A (0 ; 0 ; 0)	E (0 ; 1 ; 1)
B (0 ; 0 ; 1)	F (1 ; 1 ; 1)
C (1 ; 0 ; 1)	G (1 ; 1 ; 0)
D (1 ; 0 ; 0)	H (0 ; 1 ; 0)

Milieux d'arêtes :

I $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$	J $\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$
K $\left(1; 0; \frac{1}{2}\right)$	L $\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$

3 Équations paramétriques des droites

- Droite (IL) : $I \left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $L \left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$.
Un vecteur directeur est $\overrightarrow{IL} = L - I = (0; 1; 1)$.

$$(IL) : \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Droite (JK) : $J \left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$, $K \left(1; 0; \frac{1}{2}\right)$.
Un vecteur directeur est $\overrightarrow{JK} = K - J = (1; -1; 0)$.

$$(JK) : \begin{cases} x = s \\ y = 1 - s \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

1 Parallélisme de (IJ) et (KL)

- On utilise la relation de Chasles :
 $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{EL}$
- Or I et K sont les milieux de $[AD]$ et $[CD]$:
 $\overrightarrow{IE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{KE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE}$
- Et J et L sont les milieux de $[EH]$ et $[EF]$:
 $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$
- Dans un cube, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$,
 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EH} = -\overrightarrow{AB}$.
- Ainsi, $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AH} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
 $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

On obtient $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KL}$, donc les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.

4 Les droites (IL) et (JK) sont-elles sécantes ?

- On cherche t et s tels que les coordonnées soient égales :

$$(IL) : \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = t \\ z = t \end{cases} = (JK) : \begin{cases} x = s \\ y = 1 - s \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- On obtient le système : $\begin{cases} \frac{1}{2} = s \\ t = 1 - s \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$
- Les droites (IL) et (JK) sont donc sécantes pour $(s, t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

**Le point d'intersection est $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$,
qui est le centre du cube.**