



Vecteurs, droites et plans de l'espace

Fiche d'exercices #9

Corrigé

Énoncé

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2; -1; 0), \quad B(3; -1; 2), \quad C(0; 4; 1) \quad \text{et} \quad S(0; 1; 4).$$

Montrer que les points A, B, C et S **ne sont pas coplanaires**.

1 Coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS}$

$$A(2; -1; 0), \quad B(3; -1; 2), \quad C(0; 4; 1), \quad S(0; 1; 4).$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-2 \\ -1-(-1) \\ 2-0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AS} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-(-1) \\ 4-0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2 Recherche d'une combinaison linéaire

- On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AS} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

En utilisant les coordonnées, cela revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} -2 = a - 2b & (1) \\ 2 = 5b & (2) \\ 4 = 2a + b & (3) \end{cases}$$

3 Résolution du système

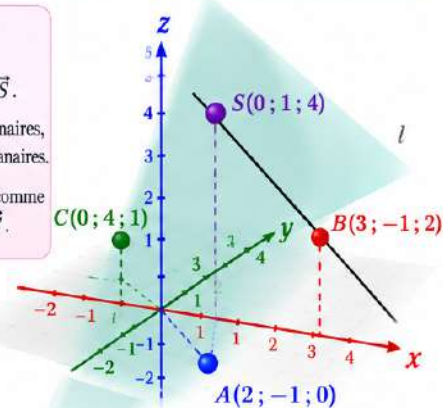
- D'après (2), on obtient $b = \frac{2}{5}$.
- En remplaçant dans (1) : $-2 = a - 2 \times \frac{2}{5} = a - \frac{4}{5}$, d'où $a = -2 + \frac{4}{5} = -\frac{6}{5}$.
- On vérifie dans (3) :

$$2a + b = 2 \times \left(-\frac{6}{5}\right) + \frac{2}{5} = -\frac{12}{5} + \frac{2}{5} = -\frac{10}{5} = -2.$$

Or le membre de gauche vaut 4, donc l'égalité (3) n'est pas vérifiée.

Idée et méthode

- On étudie les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS}$.
- Si les points A, B, C et S étaient coplanaires, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS}$ seraient coplanaires.
- On montre que $\overrightarrow{AS}$ ne peut pas s'écrire comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.



4 Conclusion sur la coplanarité

Le système n'admet pas de solution.

Il n'existe donc pas de réels a et b tels que

$$\overrightarrow{AS} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS}$ ne sont pas coplanaires.



Par conséquent, les points A, B, C et S

ne sont pas coplanaires.

Remarque

Pour montrer que quatre points ne sont pas coplanaires, il suffit de montrer que trois des vecteurs formés avec ces points ne sont pas coplanaires, par exemple $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS}$, comme ici.