

## 1 Partie A : Première modélisation

### 1 Calcul de $u_2$ et $u_3$

$$u_1 = 3.$$

$$u_2 = 0,9u_1 + 1,3 = 0,9 \times 3 + 1,3 = 4.$$

$$u_3 = 0,9u_2 + 1,3 = 0,9 \times 4 + 1,3 = 4,9.$$

#### Interprétation

Le 1<sup>er</sup> mois : 300 questions.

Le 2<sup>e</sup> mois : 400 questions.

Le 3<sup>e</sup> mois : 490 questions.

### 2 Expression explicite par récurrence

On considère la proposition  $P(n)$  : « pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$  ».

- **Initialisation** : pour  $n = 1$ ,

$$13 - \frac{100}{9} \times 0,9^1 = 13 - 10 = 3 = u_1.$$

La propriété est vraie au rang 1.

- **Hérédité** : supposons  $P(n)$  vraie pour un rang  $n \geq 1$ , c'est-à-dire

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n.$$

Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,9u_n + 1,3 \\ &= 0,9 \left( 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n \right) + 1,3 \\ &= 11,7 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} + 1,3 \\ &= 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc  $P(n+1)$  est vraie.

Par récurrence, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n.$$

### 3 Sens de variation

Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$u_{n+1} - u_n = (0,9u_n + 1,3) - u_n = -0,1u_n + 1,3 = 1,3 - 0,1u_n.$$

Or, d'après l'expression explicite,  $u_n < 13$  pour tout  $n$ , donc  $1,3 - 0,1u_n > 0$ .

Ainsi, pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} > u_n$  : la suite  $(u_n)$  est croissante.

### 4 Valeur renvoyée par le programme Python

```
def seuil(p):
    n=1
    u=3
    while u<=p:
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Saisie : seuil(8.5)

On obtient  $n = 16$ .

#### Interprétation

Il faut attendre le 16<sup>e</sup> mois pour que le nombre de questions dépasse 850 (soit 8,5 centaines).

## 2 Partie B : Une autre modélisation

On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout  $n \geq 1$  par :

$$v_n = 9 - 6 \times e^{-0,19(n-1)}.$$

### 1 Calcul de $v_1$ et $v_2$

$$v_1 = 9 - 6 \times e^0 = 9 - 6 = 3,00.$$

$$v_2 = 9 - 6 \times e^{-0,19} \approx 9 - 6 \times 0,8270 \approx 4,04.$$

Ainsi,  $v_1 \approx 3,00$  et  $v_2 \approx 4,04$  (au centième près).

### 2 Plus petite valeur de $n$ telle que $v_n > 8,5$

#### Méthode 1 : avec le logarithme népérien

$$\begin{aligned} v_n > 8,5 &\Leftrightarrow 9 - 6e^{-0,19(n-1)} > 8,5 \\ &\Leftrightarrow -6e^{-0,19(n-1)} > -0,5 \\ &\Leftrightarrow e^{-0,19(n-1)} < \frac{1}{12} \\ &\Leftrightarrow -0,19(n-1) < \ln\left(\frac{1}{12}\right) \\ &\Leftrightarrow n > 1 - \frac{\ln(1/12)}{0,19}. \end{aligned}$$

Comme  $\ln(1/12) \approx -2,4849$ , on obtient  $n > 14,077...$  donc la plus petite valeur entière est

$$n = 15.$$

#### Méthode 2 : par recherche du seuil à la calculatrice

On calcule les valeurs de  $v_n$  :

$$v(14) \approx 8,439 < 8,5$$

$$v(15) \approx 8,575 > 8,5$$

Donc la plus petite valeur est

$$n = 15.$$

## 3 Partie C : Comparaison des deux modèles

### 1 Modèle le plus rapide pour atteindre 850 questions

- Modèle 1 : il faut attendre le 16<sup>e</sup> mois ( $u_n > 8,5$ ).
- Modèle 2 : il faut attendre le 15<sup>e</sup> mois ( $v_n > 8,5$ ).

C'est le modèle 2 qui conduit à procéder le plus tôt à la modification du site.

### 2 Quel modèle donne le plus grand nombre de questions à long terme ?

- Modèle 1 :  $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 13.$
- Modèle 2 :  $v_n = 9 - 6e^{-0,19(n-1)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 9.$

À long terme, le modèle 1 prévoit un plus grand nombre de questions sur la FAQ (environ 1 300 contre 900).