

Exercice de synthèse 12

Corrigé

Suite homographique, suite auxiliaire et récurrence

Terminale spécialité maths

Des méthodes pour comprendre et progresser !

1 Premiers termes de la suite (u_n)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$



1 Calcul du terme u_1

$$u_1 = \frac{2u_0 + 1}{u_0 + 2} = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \frac{5}{4}.$$

$$u_1 = \frac{5}{4}$$

2 Étude de la suite auxiliaire (a_n)

On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n , par $a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$.

a Calcul de a_0 et a_1

$$a_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{2}{2 - 1} = 2.$$

$$a_1 = \frac{u_1}{u_1 - 1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4} - 1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = 5.$$

$$a_0 = 2 \text{ et } a_1 = 5$$

b Relation de récurrence

On a $a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1}$ avec $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

$$u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1 = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

$$\text{Donc } a_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1} = 2 \frac{u_n - 1 + 1}{u_n - 1} = 2 \left(1 + \frac{1}{u_n - 1} \right) = 2 + \frac{2}{u_n - 1} = 2 + 2a_n = 3a_n - 1.$$

$$a_{n+1} = 3a_n - 1$$

c Inégalité par récurrence : $a_n \geq 3^n - 1$ pour $n \geq 1$

- **Initialisation** : pour $n = 1$, $a_1 = 5 \geq 3^1 - 1 = 2$.
- **Hérédité** : supposons $a_n \geq 3^n - 1$ pour un $n \geq 1$. Alors $a_{n+1} = 3a_n - 1 \geq 3(3^n - 1) - 1 = 3^{n+1} - 4 \geq 3^{n+1} - 1$.
- **Conclusion** : pour tout $n \geq 1$, $a_n \geq 3^n - 1$.

d Limite de (a_n)

Comme $a_{n+1} = 3a_n - 1$, on a $a_n \geq 3^n - 1$ et donc $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

La suite (a_n) diverge vers $+\infty$.



3 Limite de la suite (u_n)

a Expression de u_n en fonction de a_n

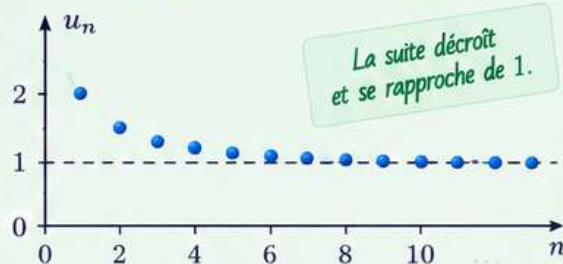
Par définition de $a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$, on a $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$.

b Limite de (u_n)

Comme $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on a $\frac{a_n}{a_n - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

La suite (u_n) converge vers 1.

Quelques termes de la suite (u_n)



4 Un programme Python

On considère le programme suivant :

```
1 def algo(p):
2     n = 0
3     u = 2
4     while u > 1 + p:
5         u = (2*u + 1) / (u + 2)
6         n = n + 1
7     return n, u
```

Valeur renvoyée pour $p = 0,01$

On cherche le plus petit entier n tel que $u_n \leq 1 + 0,01 = 1,01$.

On utilise l'expression $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$ avec $a_{n+1} = 3a_n - 1$ et $a_0 = 2$.

On obtient successivement :

$$u_6 \approx 1,0135 > 1,01 \text{ et } u_7 \approx 1,0067 \leq 1,01.$$

Ainsi, la boucle s'arrête pour $n = 7$ et la valeur renvoyée est u_7 .

Pour $p = 0,01$, le programme retourne (7, 1.0067...).



Python pour expérimenter et conjecturer !

Les maths ouvrent de nouveaux horizons !

Chercher

Raisonner

Modéliser

Calculer

Conclure