

Exercice de synthèse 12

Suite homographique, suite auxiliaire et récurrence

Terminale spécialité maths

Des suites pour comprendre, modéliser et raisonner !

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

Une même suite, plusieurs approches, une limite à découvrir !

1 Premiers termes de la suite (u_n)

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

- 1 Calculer le terme u_1 .



2 Étude de la suite auxiliaire (a_n)

On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n , par : $a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$.

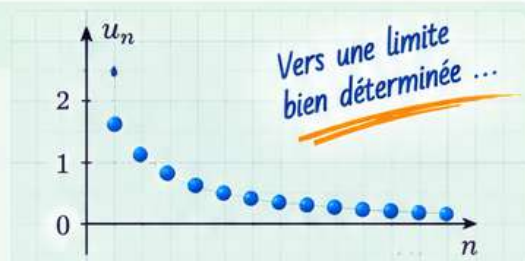
On admet que la suite (a_n) est bien définie.

- 2 a Calculer a_0 et a_1 .
2 b Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 3a_n - 1$.
2 c Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_n \geq 3^n - 1$.
2 d En déduire la limite de la suite (a_n).



3 Limite de la suite (u_n)

- 3 a Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$.
3 b En déduire la limite de la suite (u_n).



4 Un programme Python

On admet que la suite (u_n) est décroissante.

On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
1 def algo(p):  
2     n = 0  
3     u = 2  
4     while u > 1 + p:  
5         u = (2*u + 1) / (u + 2)  
6         n = n + 1  
7     return n, u
```

- 4 Donner, en justifiant, ce que retourne le programme pour $p = 0,01$.



Python : un outil puissant pour explorer les suites !

Les maths éclairent de nouveaux horizons !

Chercher

Raisonner

Modéliser

Calculer

Conclure