

Exercice de synthèse 7

Corrigé

Probabilités et suites

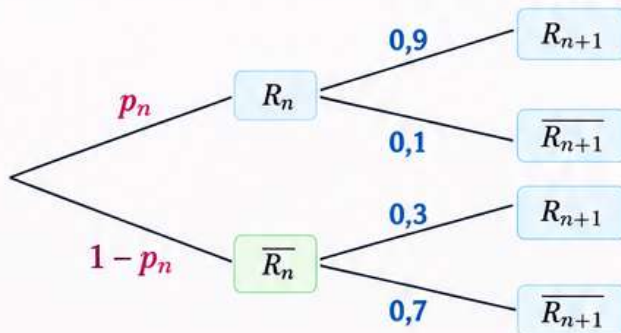
Terminale spécialité maths

Analyser
Modéliser
Raisonner
Conclure !

Des probas d'aujourd'hui aux réussites de demain !

1 Arbre pondéré

On complète l'arbre avec les probabilités conditionnelles données dans l'énoncé.



Rappel des données :

- si l'athlète franchit la haie un jour, il la franchira le lendemain dans 90 % des cas ;
- s'il ne la franchit pas un jour, il ne la franchira pas le lendemain dans 70 % des cas.

2 Relation de récurrence

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(R_{n+1}) = P(R_n)P(R_{n+1}|R_n) + P(\overline{R_n})P(R_{n+1}|\overline{R_n}) \\ &= p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,3 \\ &= 0,9p_n + 0,3 - 0,3p_n \end{aligned}$$

$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3.$$

On utilise :

- $P(R_n) = p_n$;
- $P(R_{n+1}|R_n) = 0,9$;
- $P(\overline{R_n}) = 1 - p_n$;
- $P(R_{n+1}|\overline{R_n}) = 0,3$.

3 Étude de la suite (u_n)

a Suite géométrique

On pose $u_n = p_n - 0,75$. Alors

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,75 = (0,6p_n + 0,3) - 0,75 = 0,6(p_n - 0,75) = 0,6u_n.$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison 0,6 et de premier terme

$$u_0 = p_0 - 0,75 = 0,6 - 0,75 = -0,15.$$

On remarque que

$$0,75 = \frac{0,3}{1 - 0,6}$$

(c'est le point fixe de la relation de récurrence).

b Expression explicite de p_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = u_0 \times 0,6^n = -0,15 \times 0,6^n$$

$$\text{donc } p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.$$

On retrouve bien $p_0 = 0,75 - 0,15 = 0,6$.

c Convergence de (p_n)

Comme $0 < 0,6 < 1$, on a $0,6^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

et par conséquent

$$p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,75.$$

La suite (p_n) est convergente et sa limite est $\ell = 0,75$.

d Interprétation

À long terme, la probabilité que l'athlète franchisse la haie lors d'une séance se stabilise et tend vers 0,75, soit 75 %.

Autrement dit, si l'entraînement se poursuit, l'athlète réussira à franchir la haie environ trois fois sur quatre.

La régularité finit par s'installer : à long terme, l'athlète franchit la haie dans 75 % des cas.



Compétences mobilisées

- Probabilités conditionnelles et formule des probabilités totales
- Suite géométrique et expression explicite
- Modélisation par une suite récurrente
- Étude de convergence et calcul de limite
- Interprétation d'un résultat dans un contexte

Les maths
au service
du réel !