

Exercice de synthèse 14 Corrigé

Suite fractionnaire et suite auxiliaire

Terminale spécialité maths

Des suites pour explorer des structures fascinantes !

1 Premières étapes

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1 a Positivité de (u_n) par récurrence

- **Initialisation** : $u_0 = \frac{1}{2} > 0$.
- **Hérédité** : supposons $u_n > 0$. Alors $1 + 2u_n > 1 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} > 0$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

La suite (u_n) est strictement positive.

1 b Sens de variation

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{1+2u_n} - u_n = \frac{3u_n - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}.$$

Comme $u_n > 0$ et $1 + 2u_n > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $1 - u_n$.

On montre (ci-dessous) que $0 < u_n < 1$ pour tout n , donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est strictement croissante.



1 c Majoration et convergence

Comme $u_n > 0$, on a $1 + 2u_n > 1$ et donc

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} < 3u_n.$$

De plus, on montre par récurrence que $0 < u_n < 1$:

- $u_0 = \frac{1}{2} < 1$;
- si $0 < u_n < 1$, alors $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} < \frac{3u_n}{1} < 3u_n < 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, donc convergente.

2 Une suite auxiliaire

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

2 a (v_n) est géométrique

On calcule, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3v_n.$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 3.

Premier terme : $v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{1/2}{1/2} = 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^n$.

2 b Expression de u_n

Comme $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$, on a $u_n = \frac{v_n}{1+v_n}$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}.$$

2 c Limite de (u_n)

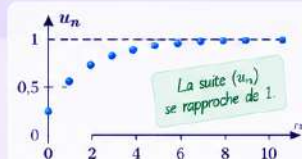
Comme $3^n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$),

$$u_n = \frac{3^n}{3^n + 1} \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty} = 1.$$

La limite de la suite (u_n) est 1.

3 Bilan

- (u_n) est strictement positive, strictement croissante et majorée par 1.
- La suite auxiliaire $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$ est géométrique de raison 3 : $v_n = 3^n$.
- On en déduit $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.



Les suites au cœur de magnifiques structures fractales !