

1 La suite (u_n)

1 Calcul de u_1

$$u_1 = \frac{6u_0 + 2}{u_0 + 5} = \frac{6 \times 8 + 2}{8 + 5} = \frac{50}{13}$$

$$u_1 = \frac{50}{13}$$

2 Étude de la fonction f

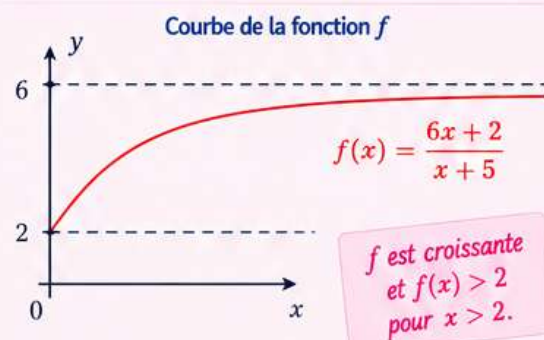
$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5} \text{ sur }]0; +\infty[.$$

$$f'(x) = \frac{6(x+5) - (6x+2)}{(x+5)^2} = \frac{28}{(x+5)^2} > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\text{Comme } f(2) = \frac{6 \times 2 + 2}{2 + 5} = \frac{14}{7} = 2,$$

on a : pour tout $x > 2$, $f(x) > 2$.



2 Monotonie et convergence de (u_n)

1 Pour tout n , $u_n > 2$ (récurrence)

- **Initialisation** : $u_0 = 8 > 2$, vrai au rang 0.
- **Hérédité** : supposons $u_n > 2$. Comme f est croissante sur $]0; +\infty[$, on a $u_{n+1} = f(u_n) > f(2) = 2$.
- **Conclusion** : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.

Ainsi, la suite (u_n) reste strictement au-dessus de 2.

2 Décroissance de (u_n)

On admet que pour tout n ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

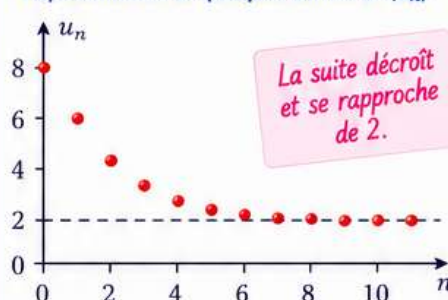
Comme $u_n > 2$, on a $2 - u_n < 0$, $u_n + 1 > 0$ et $u_n + 5 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

3 Convergence de (u_n)

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, donc elle est convergente.

Une suite décroissante
dont la limite est 2.

Représentation de quelques termes de (u_n)



3 Changement de suite

1 Calcul de v_0

$$v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \frac{8 - 2}{8 + 1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

2 (v_n) est géométrique de raison $\frac{4}{7}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{6u_n + 2}{u_n + 5} - 2}{\frac{6u_n + 2}{u_n + 5} + 1} = \frac{4}{7} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 1} = \frac{4}{7} v_n.$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{4}{7}$.

3 Limite de (v_n)

Comme $|q| = \frac{4}{7} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Le changement de suite
permet de déterminer
rapidement la limite.

4 Limite de (u_n)

On a $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1} \rightarrow 0$. Comme $u_n > 2$, on en déduit $u_n - 2 \rightarrow 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

4 Un algorithme Python

```
1 def seuil(A):
2     n = 0
3     u = 8
4     while u > A:
5         u = (6*u + 2) / (u + 5)
6         n = n + 1
7     return n
```

1 Pour $A = 2,001$, la fonction renvoie 28.
En effet, après 28 itérations, on obtient $u_{28} \approx 2,0008 \leq 2,001$
et $u_{27} \approx 2,0021 > 2,001$.
Donc la valeur renvoyée est 28.

2 Cette valeur correspond au plus petit entier n tel que $u_n \leq 2,001$.
Au cours de l'algorithme, on itère jusqu'à ce que u_n soit inférieur
ou égal au seuil A .



Python,
pour explorer
les suites !