

Exercice de synthèse 11

Suite homographique, récurrence et changement de suite

Terminale spécialité maths

Une suite, plusieurs méthodes, un même objectif !

Des outils pour avancer ...

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}$$

Étudier • Démontrer • Transformer • Conclure

Fonctions
Récurrence
Suites géométriques
Python
Limites

1 La suite (u_n)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

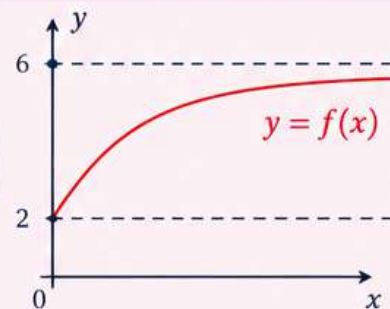
1 Calculer u_1 .

2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

- a. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
En déduire que, pour tout $n \geq 0$, $u_n > 2$ et que $f(x) > 2$ pour tout $x > 2$.

Une suite définie par une fonction homographique



2 Monotonie et convergence de (u_n)

1 Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a $u_n > 2$.

2 On admet que, pour tout entier naturel n , on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

- a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Une suite qui décroît et se rapproche d'une limite ...

3 Changement de suite

On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

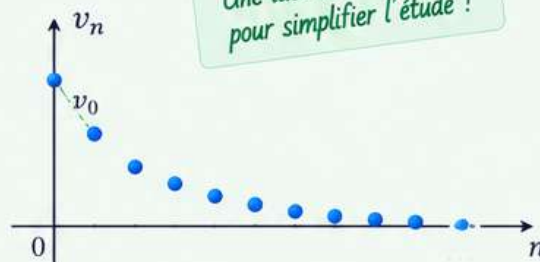
1 Calculer v_0 .

2 Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

3 Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n) .

4 En déduire la limite de (u_n) .

Une idée astucieuse pour simplifier l'étude !



4 Un algorithme Python

On considère la fonction Python suivante :

```
1 def seuil(A):  
2     n = 0  
3     u = 8  
4     while u > A:  
5         u = (6*u + 2)/(u + 5)  
6         n = n + 1  
7     return n
```

1 Que retourne cette fonction lorsque $A = 2,001$?
Donner sans justification la valeur renvoyée.

2 Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.



Python, un allié pour les suites !

Des suites pour aller plus loin ...

Les maths ouvrent de nouveaux horizons !

Chercher

Raisonner

Modéliser

Programmer

Réussir