

Rappel de l'énoncé

Soit k un nombre réel. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = ku_n(1 - u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

On étudie deux cas de figure selon les valeurs de k .

Idée clé !

Une suite définie par récurrence peut être étudiée à l'aide d'une fonction, d'un raisonnement par récurrence, de ses variations et d'un algorithme.

Partie 1 Cas $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$

1 Étude de la fonction f

a. Variations de f sur $[0; 1]$

On considère $f(x) = 1,9x(1 - x) = -1,9x^2 + 1,9x$.

C'est un polynôme du second degré, de la forme

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -1,9 < 0$.

La fonction f est donc concave sur $\mathbb{R}$ et admet un

maximum en $x = \frac{b}{2a} = \frac{1,9}{2 \times 1,9} = \frac{1}{2}$.

Tableau de variations sur $[0; 1]$:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	0	0,475	0

b. Image de $[0; 1]$ par f

On en déduit que, pour tout $x \in [0; 1]$,

$0 \leq f(x) \leq 0,475 < 1$, donc $f(x) \in [0; 1]$.

3 Encadrement et convergence

a. Montrons par récurrence que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

- **Initialisation** : $u_1 = 1,9 \times 0,1 \times (1 - 0,1) = 0,171$.

Donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2}$ et la propriété est vraie au rang initial.

- **Hérédité** : supposons la propriété vraie au rang n ($n \in \mathbb{N}$ fixé) :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

La fonction f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, donc f conserve l'ordre :

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Ainsi, } 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0,475 \leq \frac{1}{2}.$$

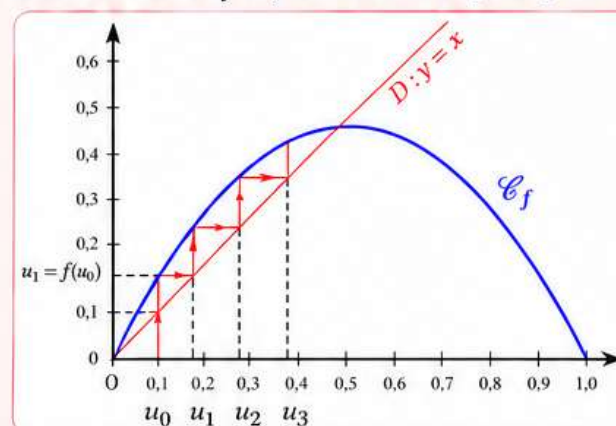
La propriété est vraie au rang $n + 1$ et elle est héréditaire.

c. Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

La suite (u_n) est donc croissante et majorée par $\frac{1}{2}$, donc convergente.

2 Lecture graphique

On utilise la courbe $\mathcal{C}_f$ de f et la droite D d'équation $y = x$.



À la lecture du graphique, les premiers termes (u_n) semblent croissants et se rapprocher d'une valeur comprise entre 0 et 1. On conjecture donc que la suite (u_n) est croissante et convergente.

Conclusion partie 1

La suite (u_n) est croissante et converge vers $\frac{9}{19}$.

Partie 2 Cas $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$

1 Convergence et limite

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, par théorème des gendarmes, on en déduit que (u_n) converge et que sa limite est 0.

Conclusion : la suite (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2 Limite par le théorème du point fixe

Soit ℓ la limite de (u_n) .

Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f fonction polynôme donc continue sur $[0; 1]$, et puisque (u_n) converge vers ℓ , alors, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie :

$$\ell = f(\ell).$$

$$\text{Ainsi, } \ell = \frac{1}{2} \ell(1 - \ell) = 0 \Leftrightarrow \ell(1 - \ell) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, donc $0 \leq \ell \leq 0$.

Ainsi, $\ell = 0$. La suite (u_n) converge vers 0.